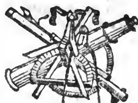
INSTITUTIONES
MATHEMATICAE
NUNC PRIMUM
A FERDINANDO PISTILLO
PROPRIA METHODO STRICTIM ELABORATAE
ET NOVIS INVENTIS AUCTAE.



PARS II.
DE GEOMETRIA PLANA, ET SOLIDA.



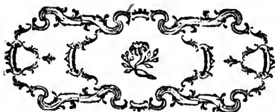
NEAPOLI MDCCLXXXVII.

Typis Petri Perger.

AUCTORITATE PUBLICA.



Compertum est, antiquos Philosophos non permisisse, ἀγεωμετρήτους Scholas suas ingredi, ut ad Sapientiae studium admitterentur .... Verum enimvero cum omnium magnarum rerum sicut arborum altitudo nos delectet, et radices stirpesque non item: sic multi ad summum pervenire optarent, nisi in Elementis haerere opus haberent. Atqui, quemadmodum illa altitudo sine radicibus, stirpibusque esse non potest; ita illi frustra se in id fastigium recipi sperant; quibus cordi non est fundamenta fideliter jacere. Apud D. Des-Cartes.



GEOMETRIAE PLANAE



DEFINITIONES GENERALES.

1. GEometria graecum est vocabulum, quod nil sonat aliud, nisi *terrae mensuram*.

Ejus artificium circa *continuam quantitatem*, seu *extensionem* agit; videlicet Geometriae objectum *extensio* est.

Haec autem si in longum tantum extenditur, *Linea* generatur: si in longum, et latum, *Superficies*; si tandem in longum, latum, et profundum, *Corpus*, sive *Solidum*, quod idem est, habetur. Ex quo discursu oritur Geome-

triae divisio in *Planam*, et *Solidam*: illa nempe de Lineis, Angulis, et Superficiebus; haec vero de Solidis sermonem habet.

Quantitas vel est *continua*, partes si veluti unitas habeat, quae, ut diximus, ad Geometriam pertinet; vel *discreta*, si partibus veluti disjunctis constet, de qua Arithmetica. Scientia de utraque agens secundum suam analysim, *Arithmetica Speciosa*, seu *Algebra* nuncupatur.

2. Superficies, quae una tantum linea includitur, quaeque *figura perfectissima* appellari solet, est *Circulus*: hic generari concipitur ex extremitate L rectae B L, uniformi motu in gyrum actae, alia B firma manente. Fig. 4.

Haec linea, quae circuli *Perimeter* appellatur, divisa tota supponitur in 360 partes aequales, singulas *gradus* dictas; in hoc convenit Geometra ob nimiam commoditatem in hujus Scientiae usibus. Hinc *Semiperimeter* 180 continet *gradus*; *Quadrans* vero 90.

Gradus subdividitur in 60 partes pariter aequales, quae *Scrupula*, vel *Minuta prima* vocantur; quorum singula in alias 60, quae dicuntur *Minuta secunda* etc.

NOTA. Hujusmodi *gradus*, et *minuta* ita recensentur: 2°, 5′, 6″ etc., et legimus: *gradus duo*, *quinque minuta pri-*

ma

ma , et *sex minuta secunda* etc.

3. Coroll. I. Circulus generatur ex motu , et quiete .

4. Coroll. II. Hinc Circulus est superficies , cujus Perimetri puncta quaevis aequaliter distant ex interiori , ubi una generantis lineae rectae extremitas firma manet . Hoc punctum interius *Centrum* dicitur , ex quo rectae ductae ad ipsa perimetri puncta , *Radii* Circuli nuncupantur , quorum singulos rectae generanti plane aequari aperte patet .



CAPUT PRIMUM.

De rectis Lineis, et Angulis.

DEFINITIONES.

5. *Punctum* dare, est signum supponere partibus carens, ideoque et quavis extensione.

6. Linea generari concipitur ex motu hujus puncti, veluti sui quoddam vestigium relinquentis. Idcirco si hujuscemodi puncti fluxus eandem directionem servat, Lineam *Rectam* generat, uti
Fig. 5. A B; si continue immutat ad eandem partem, *Curvam*, ut A D; si mox immutat, mox eandem servat directionem, *Mixtam* producit, ceu E K.

7. Coroll. I. Optime ab Archimede recta linea definitur: *Brevissima omnium* (linearum) *inter duo puncta possibilium.*

8. Coroll. II. Si duae rectae se secent, non datur in iis, ut dicitur, *commune Segmentum*: in pluribus punctis scilicet non se secant.

9. Coroll. III. Duo puncta, in una recta

cta sumta, totius directionem determinant.

10. *Rectae parallelae*, seu *aequedistantes* sunt rectae, quae licet in infinitum producantur, nunquam concurrunt, sed idem semper, et ubique servant intervallum, uti S L, N O, in quas si recta B Q incidat, haec *Secans* dicitur. *Fig.* 10.

11. Coroll. I. Duae rectae lineae ex eodem puncto versus eandem partem ita nequeunt discedere, ut ambo maneant parallelae alii rectae, quin confundantur.

12. Coroll. II. Duae rectae V S, V L junctae in puncto V, singulaeque parallelae ad N O, unam rectam efficiunt.

13. Si duae rectae aequalem non servant inter se distantiam, vel considerantur secundum partem, quam versus ad mutuum tendunt contactum, et *Convergentes* nuncupantur; vel secundum oppositam partem, et *Divergentes* nominantur.

14. Nota. Hinc inde simul esse nequeunt duae rectae vel *Divergentes*; non haberent enim eandem directionem; vel *Convergentes*, quo casu duae rectae clauderent spatium, contra dictam rationem.

15. *Angulus* est mutua inclinatio duarum linearum (quae ejus *crura* dicuntur). Hic triplex est; vel enim pro cruribus

lineas ambas habet rectas, et vocatur *Rectilineus* uti F G D; vel curvas, eo
Fig.6. casu, *Curvilineus*, uti R G D; si unam rectam, alteram curvam, *Mixtilineus*, ut C G D.

16. NOTA. Anguli rectilinei *mensura* habetur, si centro ejus vertice, describatur circulus, crura secans, et quot gradibus etc. arcus (2) interceptus ex ipsis cruribus, donatur, tot graduum etc. mensura anguli est.

17. *Vertex* anguli est punctum, in quod lineae coincidunt, uti G.

NOTA. Angulus vel una indicatur littera, si ex aliis sejunctus sit, et solus maneat, apponendo eam vertici: vel tribus, si contra, ejus alterum crus commune sit cum alio angulo, modo media littera verticem demonstret.

18. *Anguli deinceps-positi* oriuntur ex recta A L super aliam cadente; tales sunt
Fig.8. A L D, A L M. Haec recta cadens si facit hos angulos invicem aequales, vocantur *Recti*, et ipsa *perpendicularis* in D M; sin minus, uti B L, *obliqua* nominatur: Et angulus major B L M, *Obtusus*, minor vero B L D, *Acutus* nuncupatur.

19. COROLL. I. *Angulus acutus* est minor recto, iste vero minor *obtuso*.

20. COROLL. II. Infiniti numero anguli acuti,

enti, et obtusi dissimiles inter se esse possunt; non vero recti, qui omnes inter se aequantur.

POSTULATA.

21. Quovis puncto, et quovis intervallo, circulum describere.

22. Ex quovis puncto ad quodvis, vel per quodvis punctum rectam ducere.

AXIOMATA.

23. Si aequalibus addantur, vel demantur aequalia, sive commune, exorta sunt aequalia; et contra. Consequenter pro aequalibus substitui possunt caetera aequalia.

24. Omne totum sua parte majus est; et partes simul sumtae toto aequantur.

25. Si lineae rectae, vel anguli aequales fuerint, superimpositi congruunt; et è contrario, si superimpositi congruunt, aequales sunt.

26. Quae eidem aequalia sunt, inter se aequantur; et quod affirmatur de una figura, idem asserere licet de quavis alia sibi aequali.

PRO-

PROBLEMA I.

27. *Ex dato puncto* B *ducere rectam datae* C M *parem*.

RESOLUTIO. Firma manente in B rectae datae extremitate M, aliâ describatur (21)
Fig. 7. circulus S L O ; et ex puncto B ad perimetrum circuli descripti ducta (22) recta B L, haec quaerebatur.

DEMONSTRATIO. Circulus S L O rectâ M C pro intervallo descriptus est ; ergo recta ex centro ad curvam ducta (4) aequatur datae C M. Q. E. F.

28. COROLL. Hinc datae rectae majori partem, alii minori aequalem, abscindere discimus ; si nempe centro una majoris rectae extremitate, et minore data pro intervallo, circulus describatur ; pars enim intercepta ex peripheria erit quaesita portio : Et differentia inter utramque est pars extra circulum posita, et separata.

THEO-

THEOREMA I.

29. *Recta cadens supra* D M *facit angulos* deinceps-positos *duobus angulis rectis aequales* .

D. Aut recta cadit *perpendicularis* , et res patet ex numero 18 ; aut *obliqua* B L: in hac hyp. supponatur ex L erecta perpendicularis L A super D M , dicaturque angulus A L B + B L D uno recto aequari (24), cum sint partes unius recti A L D ; sed alius A L M rectus est ex hyp. ; ergo , huic addita parte alterius B L A, habetur B L M + B L D duobus rectis aequalis . Q. E. D. *Fig.8.*

30. COROLL. Ergo in punctum cujusvis rectae quotcunque cadant aliae , orti anguli omnes duobus rectis aequantur , utpote horum partes : ideoque circa punctum quot fiunt anguli , omnes simul quatuor rectis sunt aequales .

THEO-

THEOREMA II.

31. *Si duae rectae* A B , C E *se secent ; erunt anguli ad verticem oppositi aequales.*

D. Ex eo , quod recta E O cadit supra A B anguli (29) A O E, et E O B duobus rectis aequantur : item quia B O cadit supra E C , erunt E O B, B O C duobus rectis aequales ; ergo , demto communi E O B , habetur (23) A O E = B O C. Idem dicatur pro demonstranda aequalitate anguli E O B cum C O A. Q. E. D.

Fig. 9.

THEOREMA III.

32. *Si rectas* S L , N O *secat alia* B Q , *et facit angulum externum* B V L *aequalem interno opposito* V P O , *ipsae sunt parallelae , et contra* .

D. 1° * Rectae S L, N O nequeunt concurrere ex. gr. versus L, O ; convergerent eodem tempore versus N , S contra numerum 14. Nam ex hyp. angulus V P O = B V L = S V P (31) , et B V L + L V P = O P V + N P V, (29) ; demtis aequalibus , habetur angulus L V P = N P V; ergo inverse superimposita figura L V P O in N P V S secundum eandem rectam P V , congruet

Fig. 10.

gruet cum illa (25) ; ideo quò ambo L , O concurrunt , ibi quoque et N , S coincidunt , quod repugnat (14) .
Eodem discursu neque posse divergere demonstratur ; hinc inde divergerent etiam , et ita rectae ex hyp. tales non forent : ergo tandem sunt parallelae . Q. E. 1°. D.

D. 2°. Si duae rectae S L , N O sunt parallelae , secans B Q facit angulum B V L = V P O : Sit , si negatur , recta A C , quae faciat angulum B V C = V P O ; ergo (D. 1°.) A V C parallela ad N O ; sed ex hyp. S L parallela ad N O ; ergo duae rectae A V C, et S V L ex eodem puncto V discedunt ambo parallelae ad N O , quod est (11) absurdum . Q. E. 2°. D.

33. Coroll. I. Quia angulus B V L = V P O , et B V L = S V P (31), erit S V P = O P V ; hoc est secans parallelas facit angulos *alternos-internos* aequales ; et contra .

34. Coroll. II. Caeterum quia (29) B V L + L V P aequalis duobus rectis , erit (23) O P V + L V P similiter aequalis duobus rectis , et contra ; hoc est : Si secans facit angulos *internos ad eandem partem* duobus rectis aequales , rectae sunt parallelae ; et e contrario .

35. Coroll. III. Hinc si angulus O P V

+ c V

+ *c* V P dicatur minor duobus rectis, rectae lineae *c* V, O P convergant versus L, O necessum est: ut angulus enim *c* V P sit minor ipso L V P, intervallum *c* O minus esse debet alio L O; ideoque (13) etc.

36. Coroll. IV. Ergo perpendicularis in una ex parallelis, perpendicularis est et in alia.

37. Coroll. V. Si uni ex parallelis S L quaevis recta D E sit parallela, haec etiam et alii N O parallela erit, ob angulum B P O = B V L = B D E.

PROBLEMA II.

38. *In dato puncto* M, *in recta* K I, *angulum rectilineum efformare, parem dato* Q C L.

R. Centro C, intra dati anguli crura describatur circulus G E; centro M, eodem intervallo, (21) describatur alter: centris G, et P, intervallo G E, alii duo; et ex M per sectionis punctum N ducta recta facit angulum N M I = L C Q.

Fig. 11.

D. Ex constructione, arcus G E, P N aequales sunt, et portiones aequalium (26) circulorum; ergo utpote anguli arcuum aequalium, aequantur (16) inter se. Q. E. F.

PRO-

PROBLEMA III.

39. *Ex dato puncto C rectam ducere, datae H I parallelam.*

R. Ex puncto C in H I (22) ducatur recta C E, et (38) fiat angulus L C E = C E H, ducendo C L, quae est quaesita parallela. *Fig. 12.*

D. Ex constructione alterni interni L C E, H E C aequales sunt; ergo rectae (33) C L, H I sunt inter se parallelae. Q. E. F.

PROBLEMA IV.

40. *Angulum rectilineum C bisecare.*

R. Puncto C intra crura describatur circulus S Z L, et centris S et L, intervallo S L, duo describantur se se secantes in V: ex V in C ducta recta bifariam secat angulum datum. *Fig. 13.*

D. * Centro V, intervallo V S, sive aequali V L, describatur circulus L X S; ductis (22) aequalibus S V, L V, supponatur, figuram C S V superimponi in C L V, radii V S extremitas S (2) cadit per curvam S X L, et alius C S eadem S per S Z L; ergo in L punctum sectionis communis; ideo C S supra C L; ergo (25) angulus L C X = S C X. Q. E. F.

41. COROLL. I. Si super recta finita L S hinc inde ducantur aequales L C, S C, et S V, L V, mediantibus circulis se secantibus, et ducatur C V, haec ipsam bifariam dividit, et perpendiculariter (18) ab congruentiam figurarum in Y.

42. COROLL. II. Quod si data sit infinita, et in ipsa erigenda sit perpendicularis in Y, sectis portionibus aequalibus (21) Y L, YS, habetur finita LS, super qua, ut supra (41) agendo, resolvitur quaesitum.

43. COROLL. III. Si autem ex puncto C ad ipsam sit ducenda perpendicularis, puncto C, intervallo quavis obliqua ex hoc puncto ad datam ducta C S, describatur circulus S Z L : hic reducit rectam ad finitam S L, cujus extremitates S, L aequedistant ex dato (4) puncto C ; ideoque, ut supra prosequendo, in ipsam ducimus rectam perpendicularem C Y.



CAP.

CAPUT II.

De Triangulis.

DEFINITIONES.

44. *Superficies* est magnitudo tantum longa, et lata. Haec triplex est: supponitur enim generari ex motu rectae lineae, quae si semper eâdem directione perseverabit, *Recta* generabitur, uti A B C D; sin minus, *Curva*, ut B S T C; si partim immutat, *Mixta*, uti G. Fig. 14.

45. Coroll. Hinc superficiei rectae, utpote generatae ex recta, uniformi motu acta, ubique recta linea accomodari potest; vel si hujus duo puncta in ea sunt, etiam tota recta ibi necessario (9) jacet.

46. *Planae figurae* sunt rectae superficies, lineis undique terminatae.

47. Linea, seu lineae planam figuram terminantes, ejus *latera* sunt: haec insimul collecta, ipsius *Perimeter* vocatur: eadem in circulo est ipsa curva.

48. Figura vocatur *Rectilinea*, si rectis

 ter-

terminetur ; si curvis , *Curvilinea* ; si ambabus mixtim , *Mixtilinea* .

49. Planae figurae rectilineae diversa sortiuntur nomina ex diversitate , sive laterum , sive angulorum . Inter ipsas simplicissima est *Triangulum* , sive *Trilaterum* , quod definitur : *Plana figura tribus rectis terminata* .

50. Triangulum *Aequilaterum* est , quod tribus designatur lateribus aequalibus .

51. *Isosceles* , quod duo latera aequalia habet .

52. *Scalenum* tandem , quod omnia inaequalia .

NOTA . Haec diversa vocabula habet triangulum ratione laterum ; ratione vero angulorum .

53. Triangulum *Rectangulum* est , quod uno potitur angulo recto : hujus latus angulo recto oppositum , *Hypothenusa* dicitur ; reliqua , *Catheti* nominantur .

54 *Obtusangulum* est , quod unum angulum habet obtusum .

55. *Acutangulum* tandem est , quod tres angulos acutos continet .

56. Pro *basi* cujusvis trianguli quodvis latus haberi potest ; angulus vero basi oppositus , *Vertex* appellatur .

POSTULATUM.

57. Rectam lineam terminatam in directum protendere.

THEOREMA I.

58. *Si duo triangula* S D B, L M O *habuerint latus* M L = D S, M O = D B, *et angulos* D *et* M, *his cruribus contentos aequales, erunt aequalia.*

D. Supponatur triangulum S D B superimponi alteri L M O in angulis D et M, qui, utpote ex hyp. aequales, congruunt (25) inter se; item et latera aequalia D S, M L, et D B, MO quoque congruunt inter se; ergo puncta S, B cadunt supra L, O; ergo et tota basis S B (9) supra L O; ideo tota triangula sunt aequalia. Q. E. D. *Fig. 15.*

59. COROLL. Eodem ratiocinio demonstrantur pariter duo triangula aequalia, si in basibus aequalibus supponantur anguli aequales: ob aequalitatem enim basis S B cum L O, et angulorum S, L ipsis B, O, latera hos angulos componentia congruunt inter se; ideoque et D cum M.

THEOREMA II.

60. *Triangulum* L M O , *si in basi habet angulos aequales* , *Isosceles erit*

D. Aliud enim suppositum ex. gr. S D B ejusdem basis , et in ipsa aequalium angulorum , superimponi intelligatur in illo inverso modo ; et quia tota congruunt , aequalia sunt (59) : ideoque latus $OM = SD = LM$ ex hyp. . Q. E. D.

THEOREMA III.

61. *Si duo triangula* E C M , N O L *sunt mutuo aequilatera* , *erunt aequiangula* .

D. Si superimponi supponatur triangulum N O L in E C M , basis N L congruit
Fig. 16. (25) cum E M : Si negatur vero punctum O cadere supra C , cadat in Q ; ergo $EC + CM = EQ + QM$ ex hyp. ; demto communi Q M , esset $EC + CQ = EQ$ contra num. 7.

Multo minus in V ob $\overline{EC + CM} > \overline{EQ + QM} > \overline{EV + VM}$, et , ablato communi E V , ob (7) $\overline{VQ + QM} > VM$. Cadat forsitan in S ; hinc E S, sive $EC < \overline{EQ + QC}$ (7) ; ideo , demto communi E Q , erit $QC > QS$,

ad-

addito communi MQ, erit $MC > MQ + QS > MS$ (7), contra hyp.; ergo etc. Q. E. D.

62. Coroll. Si triangulum NOL supponatur Isosceles, et ex O in dimidium basis ducatur recta OZ, oriuntur duo triangula NOZ, LOZ aequalium laterum; ideoque aequiangula inter se; ergo angulus $NZO = LZO$, sive OZ (18) in basi perpendicularis, et in eadem angulus $N = L$.

THEOREMA IV.

63. *In triangulo* GDF *externus angulus* HDF *duobus internis oppositis* G *et* F *aequalis est*.

D. Ex puncto D ducatur DB (39) parallela ad GF; resolvitur externus in duos angulos, quorum $HDB = G$ (32), *Fig.* 17.
et alternus $BDF = F$ (33); ergo totus angulus $HDF = G + F$. Q. E. D.

64. Coroll. I. Externus $HDF + GDF$ aequalis (29) est duobus rectis; ergo $GDF + G + F$ duobus rectis aequales sunt (23); hinc cujusvis trianguli omnes anguli duobus rectis aequantur.

65. Coroll. II. Si intra triangulum, ex extremitatibus basis G, F ducantur duae rectae, coeuntes in Z, erit angulus

$Z > GDF$; ducta enim ZO secundum GZ, angulus $GZF > GOF$; sed $GOF > GDF$ (63); ergo etc.

66. Coroll. III. Si in pluribus triangulis duo anguli duobus alterius, vel uni aequales fuerint, in tertio etc. quoque conveniunt.

67. Coroll. IV. Ergo si super data recta fiant duo anguli (38) pares duobus dati trianguli, et crura producantur, donec sibi (35) occurrant (anguli enim duobus rectis minores sunt), ortum triangulum dato erit aequiangulum.

THEOREMA V.

68. *In triangulo Isosceli* LON *si ex vertice* O *in basin perpendicularis demittatur, haec bisecat basin.*

D. Ex hyp. angulus $NZO = LZO$, et (62) $N = L$; ergo (66) et $NOZ =$
Fig. 16. LOZ. Hinc duo aequiangula NZO, LZO, basium aequalium ON, OL (59) sunt aequalia; ideoque $NZ = ZL$. Q. E. D.

THEO-

THEOREMA VI.

69. *In quovis triangulo* G D F *lateri majori* D F *opponitur angulus major* G ; *et contra : et latera angulis proportionalia non sunt* .

D. 1°. Ducendo G O , fiat (28) D O = G D ; ergo (62) angulus D O G = D G O ; sed (63) D O G , sive D G O > F ; ergo multo magis totus G > F . Q. E. 1°. D. *Fig.* 17.

D. 2°. Angulo majori G si oppositum latus D F non sit majus , tale sit ex. gr. D G ; idcirco (*D*. 1°.) huic oppositus angulus F esset major contra hyp.. Q. E. 2°. D.

D. 3°. * Supponatur triangulum Isosceles G Z F ; in vertice habens angulum duplum singulorum , qui sunt in basi . Hinc si dicantur angulis latera proportionalia , esset latus G F = 2 Z F = G Z + Z F contra hyp. (7) . Q. E. 3°. D.

ANIMADVERSIO.

70. * In praecedenti propositione aperte demonstratum est, angulo majori opponi in quovis triangulo latus majus, ita quidem et perpetuo, ut si angulus quilibet major sit altero, huic latus oppositum minus sit illo, quod opponitur angulo majori. Demonstratum tandem est, non ideo proportionalia hujusmodi angulis latera manere. Hinc consequens est, errare quosdam crassa minerva, qui ex prima proprietate alteram sequi posse autumant.

PROBLEMA I.

71. *Ex datis tribus rectis* K L, F G, H I, *quarum duae quaevis simul reliquâ sint majores, triangulum efformare*.

R. Pro basi habeatur data K L, punctis
Fig. L, et K, intervallis F G, H I, de-
18. scribantur (21) duo circuli O E P, M E N, se se secantes in E ob $\overline{FG+HI} > KL$ ex hyp.; ex E ad K et L ductae rectae faciunt triangulum K E L, ut petebatur.

D. Ex constructione E L = F G, et (2) K E,

KE = HI, sed KL habuimus pro basi; ergo ipsum triangulum habet pro lateribus datas rectas. Q. E. F.

72. Coroll. Hinc datis duabus rectis, vel una, Isosceles, vel Aequilaterum facile costruitur.



CAP.

CAPUT III.

De Quadrilateris;

DEFINITIONES.

73. *Quadrilatus* est figura quatuor lateribus praedita; quorum opposita si sunt parallela, dicitur *Parallelogrammum*: Hoc designatur duabus litteris, sitis in angulis oppositis.

74. Parallelogrammum ratione angulorum, vel est *Rectangulum* (ita simpliciter appellatur), si angulos omnes habeat rectos: vel *Oblongum*, si angulos rectos habeat, et latera omnia non aequalia. Si praeter angulos rectos omnia latera habet aequalia, dicitur *Quadratum*; si vero latera omnia aequalia, et angulos tantum oppositos aequales continet, *Rombus*. *Romboides* tandem, si opposita latera, et oppositos angulos tantum aequales.

75. Ultra Quadrilatus, figura dicitur *Polygonum*; et *Regulare*, si omnia latera, omnesque angulos habeat aequales: si

si contra ; *Irregulare* . Si vero latera opposita solummodo aequalia , et parallela , *Simetricum* nuncupatur .

76. Parallelogrammi S C D L *Diagonalis* , sive *Diameter* est recta , quae ex ejus angulo quovis ad oppositum agitur , uti C L : *Altitudo* vero est , ex puncto unius lateris ad aliud oppositum, ducta perpendicularis . *Complementa* tandem sunt duo parallelogramma S D , L F , orta , productis diametro C L , lateribus C D , C S , et D L , S L , ita ut ex unico puncto H discedant ambo parallelae F H , E H . Fig. 20.

77. Nota . Cum dicimus rectangulum E I H , intelligatur illud , factum ex E I , et I H , idem ac E I × I H . Caeterum cum dicimus duas figuras esse inter easdem parallelas, intelligimus esse ambas ejusdem altitudinis : perpendiculares enim et altitudines parallelogrammorum (76) , et parallelarum intervalla (36) demonstrant .

THEO-

THEOREMA I.

78. *Parallelogrammum* F D *bisecat diameter* C H, *et ejus opposita latera sunt aequalia*.

D. Diagonalis C H in parallelis C F; D H facit angulum F C H = D H C, et (33) F H C = D C H in aliis C D, F H (73); ergo haec figura divisa est in duo triangula C D H, C F H, quae habent super latere communi C H angulum F C H = D H C, et F H C = D C H; ideo (59) sunt aequalia; ergo C F = D H, et C D = F H. Q. E. 1°. et 2°. D.

Fig. 19.

79. Coroll. I. Igitur ob angulum F H C = D C H, et F C H = D H C, erit (23) totus H = C, idest etiam anguli oppositi in parallelogrammo aequales demonstrantur.

80. Coroll. II. Hinc si duas rectas aequales, ex. gr. F C, H D, et parallelas jungant duae aliae F H, C D, hae sunt parallelae etiam et aequales inter se.

THEOREMA II.

81. *Complementa* D G, *et* S I *parallelogrammi* S D *sunt aequalia*.

D. Triangulum C F H $=$ C E H (78), C D L $=$ C S L, et L G H $=$ L I H (37, 78); ergo, his demtis, erit (23) D G $=$ S I. Q. E. D. Fig. 20.

82. Coroll. Si quaevis recta data ex. gr. L S ponatur secundum latus G L dati parallelogrammi L F, et ex D, et S (39) ducantur S C, D C parallelae ad L S, L D; et ex C ducta diametro per L ad F G productam in H, erit, posita H E parallela ad L S, et productis D L in I, et C S in E, parallelogrammum E L aequale dato L F.

THEOREMA III.

83. *Parallelogramma* H L, H M *super basi eadem, vel aequali, et inter easdem parallelas, sunt aequalia; et è contrario.*

D. 1°. Basis H I $=$ F L (78), similiter et H I $=$ N M; ergo F L $=$ N M (26), addito communi L N, erit (23) F N $=$ L M; ergo triangula H F N, I L M habent H F $=$ I L (78), F N $=$ L M, et angulum N F H $=$ M L I (32); ideo sunt (58) aequalia; demto communi Fig. 21.

trian-

triangulo N L C, remanent aequalia trapezia H F L C, I C N M, quibus addito communi H C I, habetur H L = H M. Q. E. 1°. D.

D. 2°. Si vero S M sit constitutum super aequali basi cum alio F I, huic aequale demonstratur ope alterius parallelogrammi H M constituti super eadem basi. Q. E. 2°. D.

D. 3°. Sint parallelogramma F I, H B aequalia, sed altitudo F I sit N S, producta F L in N M (77), ad quam quoque productis H A, I B, exurgeret H M = I F = H B, quod (24) repugnat. Q. E. 3°. D.

84. Coroll. Triangula sunt parallelogrammorum, super eadem basi, et inter easdem parallelas constitutorum, (78) dimidia; ideo quae diximus de parallelogrammis, eadem applicari possunt triangulis, si haec constituta sint super eadem, vel aequali basi, et inter easdem parallelas. Quae enim conveniunt totis, etiam suorum dimidiis conveniant necesse est.

PRO-

PROBLEMA

85. *Super data recta* C D *Quadratum construere*.

R. In extremitatibus C, D datae rectae, erigantur (41) perpendiculares C L, D M, singulae pares (27) datae C D, quas jungat recta L M, ortum quadrilatus est Quadratum. *Fig. 22.*

D. Rectae D M, C L (33) sunt parallelae, et aequales; ideo quoque L M (79) ipsi C D; ergo anguli M, et L singuli sunt recti; quocirca facta figura est (74) Quadratum. Q. E. F.

86. Coroll. Datis duabus rectis, methodus patet Rectangulum construendi.

THEOREMA IV.

87. *In triangulo Rectangulo* L C P, *quadratum* L N *ex hypothenusa* L P, *aequale est quadratis* L S, P Q, *super cathetis, factis*.

D. Ducantur V P, C M; et C O (39) parallela ad L M: orta triangula V L P, C L M ob angulum V L P = C L M (23), et (74) V L = L C, L M = L P, erunt (58) aequalia, sed primum manet inter easdem parallelas V L, S P cum quadrato L S, et alterum C L M cum re- *Fig. 21.*

rectangulo L O ; ergo $\frac{1}{2}$ L S = V P L (84) , et $\frac{1}{2}$ L O = L C M ; ideo L S = L O . Similiter , ductis C N , L R, habentur triangula aequalia R P L , N P C (ob rectis angulis adjunctum communem C P L) , quorum primum aequale est dimidio quadrati P Q , et alterum dimidio alius figurae P O ; ergo totus P M = L S + C R . Q. E. D.



CAP.

CAP. IV.

De rectis Lineis in Circulo :

DEFINITIONES :

88. *Circuli tangentes*, sive *recta tangens* est, quae circulum tangit, non secat, etiamsi producta. *Circuli secantes* vero, vel *recta secans* est ea, cujus portio intra circulum manet, quae *Chorda*, vel *Subtensa* appellatur, uti L M. *Fig. 24.*

89. Circuli *Diameter* est recta, ex uno ad oppositum curvae (quae *Circumferentia*, vel *Peripheria* appellari solet) punctum ducta, per centrum transiens, veluti est recta X E.

90. *Arcus* sunt peripheriae portiones. Et circuli pars comprehensa ex chorda L M, et arcu L E M, ejus *Segmentum* nominatur, ut L M E.

91. *Sector* est circuli pars duobus radiis, et arcu, ex ipsis intercepto, contenta : ex. gr. figura C L E M *Sector* est circuli L X M E.

92. *Angulus contactus* est angulus mixtus ex peripheria, et tangente compositus B N X.

93. *Angulus segmenti* est quoque angulus mixtilineus, ex arcu, et chorda comprehensus, veluti D M E.

THEOREMA I.

94. *Recta* X D *per centrum* C *perpendiculariter cadens supra chordam* L M, *hanc bisecat: et si bisecat chordam transiens per centrum, cadit perpendiculariter; et contra.*

D. 1°. Ex centro C ducantur in L, et
Fig. 24. M radii C L, C M: triangulum L C M (4, 51) est Isosceles; ergo (68) L D = D M. Q. E. 1°. D.

D. 2°. Si X D transit per centrum, bisecans L M, supra hanc perpendiculariter cadit, ob triangula, ductis radiis C L, C M, mutuo aequilatera L C D, M C D; ideoque aequiangula (61); ergo angulus L D C = M D C. Q. E. 2°. D.

D. 3°. Si recta cadit perpendiculariter in chordam, hancque bisecet, transit per centrum ex. gr. C; si contra, transeat per G; essent ideo duo anguli G D L, C D L aequales, quia ex hyp. rectus G D L, et talis quoque C D L (D. 2°.), quod repugnat (24); ideo etc. Q. E. 3°. D.

95. Coroll. I. Dato itaque quovis arcu, si duae chordae ducantur in ipso, ad

an-

angulum positae, in quarum medietatibus erigantur (42) perpendiculares, hae ubi se secant, centrum arcus erit.

96. COROLL. II. Si perpendicularis C D, transiens per centrum; producatur in peripheriam, bisecabit arcum, ex radiis C L, C M interclusum, ob angulum scilicet (16) L C E = M C E.

THEOREMA II.

97. *Tangens* A B *in unico puncto* N *tangit circulum*.

D. Si falsum, tangat quoque in B; hoc posito, ipsa N B caderet intra circulum; ideo non amplius esset tangens secundum hyp., sed secans. Nam, ducta C S inter N et B, et radiis C N, C B, habetur angulus externus C S B > C N S; sed angulus C N S = C B S (51, 62); ergo C S B > C B S; ergo latus C B > C S (69); ideoque C S caderet intra circulum; ergo etc. Q.E.D. *Fig. 25.*

ANIMADVERSIO.

98. Ex superiori discursu, et ratiocinio clare et aperte deducitur, quamcumque rectam, ex contactus puncto N ductam, intra X, et B, secare, aut, quod idem est, minuere non posse angulum mixtilineum BNX. E contrario minuit eundem circumferentia alius circuli, transiens per N, majori radio descripti. Pariter concludere fas erit, quamvis extensionem ex. gr. XB in infinitum usque dividi posse: nam super recta NC in infinitum producta quotcunque circuli describantur, ita ut ipsorum curvae transeant per tangentis contactum, hae nunquam ad extremitatem B pertingunt. Hinc conseqnens est, angulum rectilineum ex. gr. NCB utcumque parvum, pati posse infinitas divisiones, ex eo quod si ducantur rectae quaevis ex NB in C, ex iisdem continue minuatur angulus C. Inferre liceat ergo, peripheriam circuli practice quidem, et non geometrice dici, constare ex *rectis infinite parvis*; daretur enim, quod *angulus ad contactum* dividi posset ulterius ex lineis rectis intermediis, contra antecedentem demonstrationem.

THEO-

THEOREMA III.

99. *Si ex tangentis puncto contactus* N *ducatur radius* ; *hic erit illi perpendicularis*; *et contra* .

D. 1°. Si negatur perpendicularis esse hujusmodi radius C N , sit recta C S ; ergo angulus C S N > C N S (64) , et (69) C N > C S , ideo punctum S manet intus in circulo ; ergo etc. Q. E. 1°. D.

D. 2°. Si in contactu N erigatur perpendicularis , haec transit per centrum ; alioquin sit N Q . Supponatur C N ex contactu ad centrum ducta , quo casu esset angulus Q N A = C N A , quod est impossibile (24) : nam Q N A est rectus ex hyp. , et C N A est rectus ex D. 1°. ; ideo etc. Q. E. 2°. D.

100. COROLL. Ad datum punctum peripheriae ducitur *tangens* , si in extremitate radii , ducti ex dato puncto , erigatur (41) perpendicularis : hanc esse tangentem facile ex dictis evincitur .



CAPUT V.

De Quantitatum Proportione.

DEFINITIONES.

101. Pars est magnitudo suo toto minor.
102. *Figurae rectilineae similes* sunt, quae angulos invicem habent aequales.
103. *Ratio* est habitudo, seu continentia unius quantitatis in alia.
104. COROLL. I. Quae tertiae quantitati aeque sunt proportionales, hoc est eandem rationem habent, aequantur inter se, et contra.
105. COROLL. II. Rationes idem habentes consequens, sunt inter se uti antecedentia: Sic ratio B : C se habet ad aliam S : C uti B : S.
106. *Ratio inversa*, seu *reciproca* habetur, si quatuor quantitatum in proportione duae mediae in eadem figura manent. Itaque dicimus rationes A : B, C : D dare alias in ratione reciproca, si habemus A : C = D : B.
107. *Aequalitas*, seu *proportio* in rationibus

bus habetur, si seriei unius se habent extrema, uti alia alterius pari terminorum numero praeditae.

108. Ratio ex duabus rationibus *composita* dicitur, si rectangulum ex antecedentibus, et aliud ex consequentibus factum inter se comparantur.

NOTA. Rectangulum ex. gr. ex C in D etiam sic $C \times D$ exprimi solet.

109. *Invertere* rationem est comparare consequentem antecedenti quantitati.

110. *Convertere* est differentiam inter antecedentem, et consequentem comparare antecedenti: Conversio rationis C : L est L — C : C. Si autem ipsa differentia consequenti comparatur, habetur *Dividere*; hinc L — C : L divisio rationis C : L appellatur.

111. *Alternare*, seu *permutare* rationes est comparare antecedentes quantitates inter se, et simili modo consequentes. Sic permutantur rationes C : L, S : I, si scribitur C : S, L : I.

112. *Componere* tandem est addere antecedenti suam consequentem quantitatem, et huic ortum aggregatum comparare: itaque rationis C : L compositio obtinetur, si fiat C + L : L.

113. *Valor*, seu *denominator* rationis est continentia, sive habitudo consequentis in antecedenti.

114. Coroll. I. Ratio ex. gr. A : B etiam tali pacto $\frac{A}{B}$ exprimi potest .

115. Coroll. II. Inaequalium quantitatum in tertiam , majorem rationem habet major ; et contra .

116. Coroll. III. Rationes aequales eundem habent valorem .

117. Coroll. IV. Ergo si duae rationes inter se aequales fuerint , eas *invertendo* , aequales quoque erunt .

118. Coroll. V. Hinc *dividendo* , et *componendo* rationes aequales , ortae quoque erunt aequales .

119. Coroll. VI. Si proportionalibus addantur , vel subtrahantur aeque proportionales quantitates , exortae erunt quoque proportionales .

AXIOMATA.

120. Quae sunt similia , vel proportionalia uni tertio , similia , vel proportionalia sunt inter se .

121. Pro proportionalibus quantitatibus substitui possunt aliae pari numero aeque proportionales ; modo vero ex iis rectangula non fiant , sed tantum pro rationibus demonstrandis pateant .

122. Figurae , quae habent latera omnia, omnesque angulos aequales , aequantur in-

inter se, modo vero hujuscemodi anguli aequales aequo modo contineant latera aequalia.

THEOREMA I.

123. *Rationes* A : B, A : C *ejusdem antecedentis, sunt* inverse *uti consequentia*.

D. Cum ratio B : A se habeat ad C : A uti B : C (105), *invertendo* dictas rationes habetur A : B, A : C, C : B. Si itaque priores rationes erant uti B : C, posteriores se habebunt *inverse*, hoc est uti C : B (117). Hinc asserere fas erit, rationem A : B se habere ad A : C, idem habentem antecedens, *inverse* uti consequentia.

THEOREMA II.

124. *Si quatuor quantitates sint proportionales, etiam alternando tales erunt*.

D. * Si B : D = E : F, erit quoque (116) denominator rationis B : D ad denominatorem cujuscunque, ex. gr. E : D, uti ille rationis E : F ad denominatorem alius E : D, hoc est (114) $\frac{B}{D} : \frac{E}{D} = \frac{E}{F} : \frac{E}{D}$; sed (105) $\frac{B}{D} : \frac{E}{D}$ :: B : E, et (123) $\frac{E}{F} : \frac{E}{D}$ :: D : F; ergo B : E :: D : F. Q. E. D.

THEO-

THEOREMA III.

125. *Si duae rationes sunt aequales, convertendo eas, aequales quoque oriuntur.*

D. * Sit igitur $C : S = L : N$, has duas rationes *invertendo* (117) habetur $S : C = N : L$, et has rationes *dividendo* (118), sortitur $S - C : C = N - L : L$; sive $C - S : C = L - N : L$. Q. E. D.

THEOREMA IV.

126. *Si plures quantitates aliis numero aequalibus proportionales fuerint*, ex aequalitate *proportionales erunt extremae.*

D. * Sint $C : D : L :: M : N : O$, demonstrandum $C : L = M : O$. Est (114, 123) $\frac{L}{D} : \frac{L}{C} = C : D$; item $\frac{O}{N} : \frac{O}{M} = M : N$; sed ex hyp. $C : D = M : N$; ergo $\frac{L}{D} : \frac{L}{C} = \frac{O}{N} : \frac{O}{M}$ (121.), atqui $D : L = N : O$; ideo $C : L = M O$. Q. E. D.

127. Coroll. Si quantitates plures sint, quam tres, ita proportionales, dicta ratione ad duas resolutis tribus, eodem ratiocinio prosequendo, habebitur uti prima ad unius seriei extremam, ita alius prima ad extremam.

THEOREMA V.

128. *Parallelogramma* B O , B C *ejusdem altitudinis , sunt uti bases* B D , B X.

D. 1°. * Si negatur, sit B O : B C = B D : F X ; ergo pari ratione aliud X O : B O = X E : B D , id est (117) B O : X O = B D : X E ; ideo (119) B O + B O : B C + X O = B D + B D : F X + X E, hoc est B O : B O = B D : F E ; ideo (103) esset B D = F E , quod (101) repugnat ; ergo etc. Q. E. 1°. D. *Fig.* 26.

D. 2°. Si dicatur tandem parallelogrammum A E : B X = A C : C F , demto Y X = A E , et L F = A C , nempe ita ut habeatur B Z < A E ; erit (125) A E : B Z = A C : C L ; deinde supponantur partes G Z > B K, et H K > B I : demto G Z , et N L , servata ratione ad A E , A C , erit A E : B K = A C : C N ; tandem ablato H K , et M N , eadem ratione servata , erit residuum (121) B I : H K = C M : M N ; sed M N < H G < C M ; ergo esset H K < B I contra hyp. ; ergo etc. Q. E. D. 2°. *Fig.* 27.

Quovis modo dicatur , admittendum tandem est , basis partes toties posse supponi , quoadusque extra latus ex. gr. G K , parallelogrammi partem , quaedam cadat . Eodemque discursu agatur si

si pro ratione A C : G E detur V E : E X.

129. Coroll. I. Triangula, utpote parallelogrammorum super eadem, vel aequali basi constitutorum dimidia, se habent in eadem ratione, ac ipsa tota, hoc est uti bases: ideo triangulum, ejusdem basis cum parallelogrammo sibi aequali, habere debet altitudinem duplam ipsius parallelogrammi.

THEOREMA VI.

130. *Recta* E B, *secari nequit in partes inaequales* E D, C B, *et simul haberi* B D E = E C B.

D. * Si negatur, supponatur E C B; nempe E G = B D E = B K: haec duo rectangula, ex hyp. aequalia, habebunt commune C K, et (128) C F = E X ob C B = C G = D X, et B F = D K = E D; ergo ipsum commune C K aequale esset, his demtis, toti C X, quod impossibile est (101); ergo etc. Q. E. D.

Fig. 28.

THEO-

THEOREMA VII.

131. *Intra triangulum* F B N *parallela basi* A C *secat latera sub eadem ratione*; *et contra*.

D. 1°. Ductis A N, C F, habetur (129) triangulum B C A : A C F = B A : A F, et idem B A C : C A N = B C : C N; sed (84) triangulum A N C = A F C, et A B C commune; ergo B A : A F = B C : C N, et (118) B A : B F = B C : B N. Q. E. 1°. D. *Fig. 29.*

D. 2°. * Si latera proportionaliter secta sint in A et C, haec puncta jungens recta A C erit basi parallela. Si contra asseritur, sit A O parallela basi F N; ergo (D. 1°.) B A : B F :: B O : B N; sed ex hyp. B A : B F = B C : B N; ergo B O : B N = B C : B N, ideo B O = B C (104), quod repugnat (24); ergo etc. Q. E. 2°. D.

132. Coroll. I. Datis tribus rectis, harum positis prima, et secunda B A, A F in directum, et tertia B C ad angulum acutum cum B F, haec B C producta, donec occurrat ad F N parallelam ipsi A C, dabit C N pro quarta proportionali, cum habeatur B A : A F = B C : C N (125). Ceterum datis duabus, tertia proportionalis invenitur eadem methodo, posita A F secunda vice loco supradictae tertiae B C.

133. Coroll. II. Sic habetur quinta, sexta etc. proportionalis, si primis derelictis, teneatur dicta methodus, tribus tantum posterioribus adhibitis.

THEOREMA VIII.

134. * *Triangula* LSM, LXM *inter easdem parallelas, et ejusdem basis, secans parallela* OZ *dat intervalla* ON, YZ *aequalia.*

D. In triangulo SLX, habetur (131) OL : SL = YL : XL; *dividendo* (118)
Fig. 30. SO : SL = XY : XL; sed (131) SO : SL = ON : LM, et XY : XL = YZ : LM; ergo (121) ON : LM = YZ : LM; ideoque (104) ON = YZ. Q. E. D.

THEOREMA IX.

135. *Si duo triangula sunt aequiangula, habebunt in angulis aequalibus latera homologa proportionalia; et contra.*

D. 1°. Triangula data, quia aequalium
Fig. 31. angulorum, congruunt (25) in vertice Q, et sint AQB, et MQO: ex hyp. angulus QAB = M; ergo (32) AB, MO sunt inter se parallelae; ergo datorum triangulorum latera inter se (131) sunt proportionalia. Q. E. 1°. D.

D.

D. 2°. Supposito triangulo minori AQX secundum QM, basis AX si negatur parallela alii MO, ducta AB (39) parallela basi MO, haberetur triangulum QAB = QAX; nam ex hyp. QM : MO = QA : AX = QA : AB (131); item QM : QO = QA : QX = QA : QB; ideo AX = AB, et QX = QB (104), et QA commune: ergo triangula sunt (61) aequiangula; ergo triangulum AQX idem est ac AQB aequiangulum cum MQO. Q. E. 2°. D.

136. COROLL. Est (33) BL : LO = AL : LP = AD : DM (131), quia DL parallela ad MO; ideo si D in medio rectae AM, cui YZ parallela, erit (33, 31) triangulum PLO = BLA; ideoque PO = BA, sed 2 DL = MP; idcirco 2 DL = MO + AB. Tandem in eadem hyp. ob triangulum (33) BLZ = YLO, erit rectangulum MZ = MABO (23).

THEOREMA X.

137. *Si duo triangula* LAN, GFH *habuerint angulum* A = F, *et insuper* AL : AN = FG : FH, *erunt similia*.

D. Quia angulus A = F, si fiat AC = FG, et AD = FH, habebitur (58) triangulum CAD = GFH; ergo (121) *Fig.* 32.

AC:

$AC : AD = AL : AN$, et *alternando* (124) $AC : AL = AD : AN$; ergo CD parallela (131) basi LN; ideoque (32) angulus $ACD = L$, et aliud $ADC = N$; hinc (135) triangulum CAD, vel aequale GFH simile alteri LAN. Q. E. D.

LEMMA.

138. Ratio composita ex rationibus continue proportionalibus $B : C : D$ est illa, quam habet prima B ad extremam D. Ratio enim composita ex $B : C$, et $C : D$ (108) eadem est, ac illa, quam demonstrant rectangula $B \times C$, $C \times D$; sed haec duo rectangula se habent (128) uti $B : D$ ob eandem, quam habent, altitudinem C; ergo etc.

Pariter si plures sint quantitates, quam tres, continue proportionales, ratio primae ad extremam composita demonstratur ex omnibus intermediis. Qua de causa patet, si tres sunt quantitates sub dicta ratione procedentes, rationem primae ad extremam exprimere *duplicatam* primae ad secundam; *triplicatam*, si quatuor, et sic deinceps.

NOTA. Eadem demonstratio valet in non continue proportionalibus, modo vero prior ratio posterioris antecedente affecta sit pro suo consequente. THEO-

THEOREMA XI.

139. *Similia triangula* LAN, GFH *se habent in ratione duplicata, sive ut quadrata laterum homologorum.*

D. Supponatur triangulum GFH in vertice positum sui similis LAN: ducta LD, erit triangulum CDA : LDA = AC : AL (129); similiter triangulum ALD : ALN = AD : AN = AC : AL (135); ergo DCA : DLA : NLA, sive (138) DCA : NLA uti ratio composita ex AC : AL, et AC : AL, sive se habent (108) uti $AC^2 : AL^2$. Q. E. D. *Fig.* 32.

140. COROLL. I. Similes figurae cum reduci valeant ad numero aequalia, et similia triangula (102, 137), et haec sint in ratione duplicata laterum homologorum, consequens est, ipsas quoque se habere, ut quadrata dictorum laterum: ideoque exposita quae fuere numero 87, etiam pro similibus figuris valent.

141. COROLL. II. Si, duorum quadratorum datis duobus lateribus, inveniatur (132) tertia proportionalis, ratio primae ad tertiam exhibet eam, quam habent hujusmodi quadrata.

142. COROLL. III. Ex hoc sequitur, qua-

m dra-

drata terminorum unius rationis proportionalia esse illis alterius rationis aequalis : ex. gr. sint aequales rationes B : C , et D : S , inventis tertiis continue proportionalibus (132) , habetur ∺ B : C : F , et ∺ D : S : X ; et quia (126) B : F = D : X , et B : F = $B^2 : C^2$, et D : X = $D^2 : S^2$, erit (121) $B^2 : C^2$ = $D^2 : S^2$.

THEOREMA XII.

143. *Si duorum aequalium parallelogrammorum, unum uni alterius aequalem habeat angulum , latera , hujusmodi angulum comprehendentia , proportionalia sunt; et contra.*

D. 1°. Anguli aequales oppositi sint (31) in L secundum latera : producta M O, B D constituunt tertium parallelogrammum C L (73) . Hinc X D : C L = X L : L O (128) ; item N O : C L = N L : L D ; sed (104) X D : C L = N O : C L ; ergo X L : L O = N L : L D (121) . Q. E. 1°. D.

Fig. 33.

D. 2°. Simili modo manentibus parallelogrammis , dicatur : ex hyp. X L : L O = N L : L D ; Sed (128) X D : L C = X L : L O , et N O : L C = N L : L D ; ergo X D : L C = N O : L C (121); ideoque (104) X D = N O . Q. E. 2°. D.

144. Coroll. Patet igitur cur , datis qua-

quatuor quantitatibus duarum rationum aequalium, rectangulum ex extremis aequatur facto ex mediis; vel tribus in proportione continua, cur ex extremis facto quadratum ex media sit aequale; et e converso.

THEOREMA XIII.

145. *Si ex trianguli rectanguli* C S D *vertice* S *ad hypothenusam* C D *perpendicularis* S L *demittatur, resolvitur ipsum in triangula inter se, et singula toti similia.*

D. 1°. et 2°. Triangula C D S, D L S habent angulum communem D, et (20) angulum D L S = S; ideo (*66*) C = L S D; ergo (135) haec duo sunt similia. Pariter triangula C S L, C S D cum habeant C communem, alterum C L S = C S D, et (*66*) C S L = D, similia erunt; ergo toti singula sunt similia, et (120) inter se. Q. E. 1°. et 2°. D. *Fig.* 34.

146. Coroll. I. Itaque est (135) C L : C S = C S : C D, et L D : D S = D S : D C; ergo (144) $CL \times CD = CS^2$, et $LD \times DC = DS^2$; sed $DC^2 = CS^2 + SD^2$ (87); ergo $DC^2 = LCD + LDC$: hoc est: *In recta quavis* C D *utcunque secta in* L, *erit quadratum ex tota aequale rectangulis ex singu-*

 lis

lis partibus in totam. Hinc idem est rectangulum ex una recta in aliam, ac duo, ex singulis divisae partibus in aliam, orta. Facile intelligitur itidem, si punctum L sit in medio rectae, idem esse CD^2, ac $4\,CL^2$, ob rectangulum $CL \times LD = DL^2 = CL^2$.

147. Coroll. II. Sit tota CD ad libitum divisa in L, habetur $CLD + LD^2 = CDL$, supposita majori recta CD divisa, indivisa vero minori LD; et (146) cum sit $CDL = SD^2 = SL^2 + LD^2$ (87), demto LD^2, erit $CLD = SL^2$ in rectangulo triangulo; et contra: alias sit idem $CLD = LV^2$, iccirco $LV^2 = LS^2$, quod falsum; ergo etc. Hinc $CS^2 + CDL = CD^2$, substituto CDL pro aequali SD^2 (121).

148. Coroll. III. Praeterea habebitur ex dictis hucusque $CD^2 = CL^2 + CLD + CDL$, addito communi LD^2, exurgit $CD^2 + LD^2 = CL^2 + CLD + CDL + LD^2$; sed ex antecedenti est $CLD + LD^2 = CDL$; ergo $CD^2 + LD^2 = CL^2 + 2\,CDL$: videlicet: *Si recta sit utcunque secta, erunt quadrata ex tota, et ex parte minori aequalia quadrato ex parte majori, cum duplici rectangulo ex tota in minorem facto.*

CAP.

CAPUT VI.

De Angulorum in Circulo descriptorum Mensura.

DEFINITIO.

149. *ANguli Quantitas*, sive *Mensura* est notio graduum ex ipsius cruribus comprehensorum illius circuli, cujus centrum sit anguli vertex (16).

THEOREMA L.

150. *Mensura anguli* C D S, *facti ex tangente, et chorda, est dimidium arcus* S M D, *ex ipsa chorda subtensi.*

D. Producatur radius L D in X, et ducatur L M perpendicularis in S D; habetur trianguli A L D externus (63) angulus X D A = D A L + A L D; sed angulus C D X est (100) rectus; pariter ex constr. alter D A L; ergo, his demtis, et communi A D L in alio (29) C D L, erit C D A = A L D; sed mensura anguli M L D = M D = $\frac{1}{2}$ S M D (16) Fig. 35.

(16); ergo et illa (96) anguli C D S $=$ $\frac{1}{2}$ S M D. Q. E. D.

THEOREMA II.

151. *Mensura anguli* C D A ad peripheriam *est dimidium arcus* C X A, *ex ipsius cruribus interclusi*.

D. Vertici supposita tangente L D, anguli L D A mensura est (150) dimidium arcus D S C A; sed alterius L D C $=$ $\frac{1}{2}$ C S D; ergo dati C D A est dimidium arcus C X A. Q. E. D.

Fig. 36.

152. Coroll. I. Omnes anguli *ad peripheriam* super eodem, vel aequali arcu, et in eodem, vel aequali circulo (quod idem (26) est) aequantur inter se; ideo C Q A $=$ C D A, et D A Q $=$ D C Q.

153. Coroll. II. Iccirco triangulum C Z D (135) simile est opposito A Z Q; ideoque habetur C Z : Z D $=$ Z A : Z Q, nempe (144) rectangulum C Z Q $=$ D Z A.

154. Coroll. III. Si ex tangentis contactu ad circumferentiam ducatur perpendicularis D X, haec erit (100) diameter; super qua constitutus angulus *ad peripheriam* D Q X est rectus, nam angulus rectus L D X $=$ D Q X, ob singulorum eandem mensuram, arcus nempe X S D dimidium. Hinc in semicirculo angulus est

est rectus; in segmento majori, minor recto, uti D Q C, qui dimidium habet arcus minoris C S D pro sui mensura; Et in segmento minori, major recto, ut D Q A, cum hujus mensuram exprimat dimidium totius D S C A.

THEOREMA III.

155. *Circa rectum angulum* C S D *circumscribi potest Semicirculus*,

D. Si negatur, Semicirculus sit C F D, non tangens verticem S; sed angulus C F D ex hyp. in semicirculo (154) est rectus; ergo aequalis (20) dato S, quod est (65) absurdum; ergo etc. Q. E. D. Fig. 37.

156. Coroll. Itaque si ex dimidio hypothenusae X ducatur S X, habetur $XS = XC = XD$; sed, ducta perpendiculari S L, (147) rectangulum $CLD = LS^2$, addito communi XL^2, erit $XL^2 + LS^2$, hoc est (87) XS^2, videlicet $XD^2 = CLD + XL^2$: Nempe *Si recta sit bisecta in* X, *et utcunque in* L, *erit quadratum ex dimidia* X D *aequale quadrato ex intermedia* X L, *una cum rectangulo ex inaequalibus* C L; L D.

THEOREMA IV.

157. *Quadratum ex tangente* O A *in circulo aequale est rectangulo ex tota secante* O D *in partem externam* O C.

D. Triangulum O D A simile est alii O C A ob aequales angulos O A C, C D A (150), et communem O; ideoque D O: O A = O A : O C (135); ergo (144) $OA^2 = DOC$. Q. E. D.

Fig. 38.

158. Coroll. Omnium secantium igitur rectangula in circulo, ut supra constructa, aequalia sunt inter se; proinde producta diameter D X in B, quia habetur $BA^2 = XBD$, addito communi $XM^2 = MA^2$ (4), erit $MB^2 = DBX + MX^2$: Nimirum *Si recta quaevis* D X *sit bifariam secta in* M; *eique adjuncta alia* X B, *erit quadratum ex dimidia, et parte addita* M B, *aequale rectangulo ex tota composita* D B *in partem* X B, *unà cum quadrato ex media* M X.

ANI-

ANIMADVERSIO.

159. In quadrato O A P latus, et diagonalis *lineae incommensurabiles* sunt, nequit scilicet inter cathetum et hypothenusam cujusvis quadrati pro *communi mensura* dari linea, etsi infinite parva, ut ajunt, concepta. Hoc clare demonstratur tali pacto: Diviso angulo O bifariam (40) per rectam O L, et ducta in O P perpendiculari (43) L G, habetur triangulum A O L = G O L, (59, 64): eademque ratione habeatur alterum A N F = B N F. Supposita communis mensura X metitur O G = A O; sed ex hyp. metitur totam O P, ergo partem itidem G P. Triangulum L G P est Isosceles; angulus enim L P G (64) est semirectus; ergo (59) P G = G L: pariterque B L = B F. Itaque X mensura quoque est ipsius G L = L A = A N ob L N parallelam (131) basi O P: eadem X metitur etiam L P, utpote reliquam partem lateris A P, et L N = L P (58) quoque metitur, consequenter partem B L ob N B = N A, et B F = F A; sed F A supponi tandem potest minor datâ X; ergo etc. *Fig. 39.*

160. Haec demonstratio irregularitatem patefacit illius ratiocinii, quod in demon-

monstratione supponit partem aliquotam in quantitatibus datis. Sub hac hyp. enim Theoremata quidam solvunt, atque demonstrant, quin incassum laborare cognoscant, quatenus scilicet demonstrationes ingrediantur pro casibus particularibus, non quidem universalibus. Quo casu opus est iterum, et diversimode rem declarare, si velint aliquid probare.



AP-



APPENDIX I.

De longitudinis inaccessae Mensura.

DEFINITIONES.

161. *Linea visualis* est radius, qui ex objecto in oculum incidit.

162. *Angulus visualis* est angulus ex duabus hujusmodi lineis ortus.

PROBLEMA I.

163. *Latitudinem vallis* A C *invenire*.

R. Ex A versus B ducatur recta: et in C erigatur perpendicularis C B (42): fiat $AB^2 - BC^2$, et ex residuo extracta radix dabit A C. Fig. 40.

Demonstratio descendit ex num. 87. Q. E. F.

In numeris. Sit $AB = 10$, et $BC = 6$. Ex dictis habetur $10^2 = 100$, et $6^2 = 36$: fiat $100 - 36 = 64$, et $\sqrt{64} = 8$, erit $CA = 8$.

PRO-

PROBLEMA II.

164. *Inaccessam longitudinem* C E *notam facere.*

R. Ex E in linea visuali C E erigatur perpendicularis (42) E D, fiat angulo
Fig. 41. visuali (38) E D C alius aequalis E D F; producatur C E in F, habetur E F = E C.

D. Duo triangula E D F, E D C habent ex construct. angulos in E aequales, et pariter in D, super communi E D; ergo sunt (59) aequilatera; ergo etc. Q. E. F.

PROBLEMA III.

165. *Distantiam* C E *metiri.*

R. Si spatium non pateat, ubi operari possimus methodis superioribus, in X N parte aliquota ipsius D E, fiat angulus N = E, et X = D (38), et producantur latera, usquedum coincidant in M; fiat X N : N M = D E : E C, habetur E C nota.

D. Triangula X M N, D C E sunt aequiangula (66); ergo habent latera homologa proportionalia; ideoque X N : N M = D E : E C. Q. E. F.

In

In numeris. Sit X N = 3, et N M = 4, et tandem D E = *6*. Fiat ex regula aurea 3 : 4 = *6* : 8, habetur 8 = E C.

PROBLEMA IV.

166. *Altitudinem* M X *invenire*.

R. Recta M Z sit perpendicularis in M X; in Z N parte aliquota ipsius Z M fiat (38) angulus N Z O = M Z X, et N = M. Latera coibunt in O: fiat Z N : N O = Z M : M X, eritque nota M X. Fig. 42.

Ope speculi in Z horizontalis potest sumi angulus N Z O = M Z X, oculo adposito in O.

D. Est eadem, ac antecedentis. Q. E. F.

In numeris. Sit O N = 4, N Z = 3, et Z M = *6*. Quartus proportionalis in 3 : 4 = *6* ? est 8, qui aequalis est altitudini M X.

167. Coroll. Eâdem methodo datur nota longitudo Z X, si post eandem constructionem, fiat N Z : Z O = Z M : Z X.

In numeris. Fiat 3 : 5 = *6*: 10, oritur 10 longitudo ipsius Z X.

PRO-

PROBLEMA V.

168. *Dato circuli segmento* D B S, *ejus diametrum invenire*.

R. In chordae D S medio C (41) erigatur
Fig. 43. perpendicularis C B, per hanc dividatur CS^2, quotus unà cum C B aequalis est diametro circuli D B S.

D. Ex constructione segmenti medietas C B S portio est semicirculi, ex gr. B S O, in quo, vertice S, basi B O, rectus angulus inscribi potest (154), cujus proprietas est (146), mediante perpendiculari S C, ut quadratum ex dicta S C aequale sit rectangulo ex O C in C B; ideoque etc. Q. E F.

In numeris. Sit $CS = 6$, et $CB = 5$; per $CB = 5$ dividatur $CS^2 = 36$, quotus $7\frac{1}{5} + 5 = 12\frac{1}{5} = BO$.

SCHOLION I.

169. De Circuli Theoria hic aliqua delibare operae pretium existimamus. Primo enim pro practicis mensuris supponere liceat, omnes radios circuli tamquam perpendiculares in perimetro, considerata curva ex rectis infinite parvis composita. Suppositio haec est, atque hypothesis, non mathematicis legibus ap-

apprime conveniens. Falsa, et absurda, stricte loquendo, ipsa est; daretur enim triangulum isosceles, sector nempe, cujus tres anguli duos rectos superarent, contra demonstrationem num. 64 declaratam. Hic faciunt quoque, quae dicta fuere numero 98.

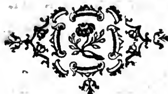
170. Deinde uti liceat itidem ratione $1:3\frac{1}{7}$ pro illa, quam habet radius ad perimetrum cujusvis circuli. Indicium, quo id statuitur, hic non movemus: Consulat cupidus Lector notas apud Andream Tacquet. Hinc ex hac ratione necessario fluit, circulorum perimetros inter se esse uti radii. Practica est propositio, utpote ex principiis minus rectis descendens. Adhuc enim ignota circuli quadratura accurata.

SCHOLION II.

171. Neminem latet, cum de alicujus lineae, superficiei etc. mensura sermo procedit, debere hoc, ut suum finem sortiatur, arithmeticis algorithmis absolute expediri: ideoque in hujusmodi practicis resolutionibus intermiscere liceat arabicas notas, uti egimus, et acturi sumus. Auctoritatem praestat ad rem Wolphius, qui §. 19. De div.

cogn.

cogn. grad. ita loquitur : *In resolutionibus numericis problematum, typus calculi ad figuram relatus exhibendus est, qui problema cum resolutione distincte repraesentat, et ideam operatricem animo insinuat; quae firmior eidem inhaeret, quam resolutio memoriae mandata; ita ut haec non tam facile te fallat . . .* §. 49. *cum repraesentatio demonstrationis in numeris non sit, nisi ipsa demonstratio scientifica, seu generalis, ad exemplum aliquod, majoris perspicuitatis gratia, applicata: quemadmodum in Geometria demonstratio applicatur ad figuram in charta delineatam, quae singulare exemplum praebet.*



AP-



APPENDIX II.

De Planae Superficiei Mensura.

DEFINITIO.

172. *Planae superficiei dimensio* est invenire quot data quadrata ipsa area in se contineat.

POSTULATUM.

173. Pro mensura superficiei uti quovis parvo quadrato.

PROBLEMA I.

174. *Rectanguli* E D *aream invenire*.

R. Communis (173) mensurae quadrati S latus continetur 4 in D G, et 8 in L G: fiat 8×4, oritur 32, area quaesita rectanguli dati. *Fig.* 44.

D. Si ex sectionibus in rectanguli lateribus E G, G D secundum illa in S actis, ad C D, et E C ducantur parallelae, hae constituunt totidem quadrata

(32, 78), singula aequalia dato S: ideoque si series super E G augeatur secundum illam in G D, habeatur numerus omnium in data superficie possibilium necesse est. Q. E. F.

175. COROLL. I. Parallelogrammum non rectangulum, utpote aequale alii ejusdem basis (83) et altitudinis, sat erit altitudinem ducere in basin, ut ejus superficies inveniatur.

176. COROLL. II. Cum triangulum quodvis dimidium sit parallelogrammi ejusdem altitudinis, et basis, ejus superficies habetur, si dimidium basis (84) in altitudinem ducatur; vel e contrario.

177. COROLL. III. Trianguli rectanguli habetur superficies, si numerum laterum quadrati communis in uno ex cathetis in alterius dimidium ducimus.

PROBLEMA II.

178. *Trapezii* B V L C *aream invenire*.

Fig. 45. *R. Trapezii* altitudo (43) ducatur in $\frac{1}{2}$ V L + $\frac{1}{2}$ B C, productum est quaesita area.

D. Ducta per D medietatem rectae L C ipsi B V parallela X G, oritur triangulum (136) L D G = X D C; ergo parallelogrammum B V G X aequale est dato trapezio; sed illius superficies habetur (175) methodo praedicta; ergo pari-

riter et trapezii sibi aequalis. Q.E.F.

PROBLEMA III.

179. *Polygoni regularis* V S D X *aream invenire*.

R. Bisecentur (40) anguli S, D; orti trianguli S C D altitudo C L ducatur in dimidium perimetri V S D X, habetur polygoni superficies. *Fig.* 46.

D. Si omnes anguli bisecantur, totidem (59) triangula aequalia oriuntur, quorum area habetur, si altitudo in basis dimidium ducatur (176): ergo dictam altitudinem si ducamus in dimidium perimetri, hoc est in dimidium omnium basium, oritur polygoni superficies. Quod omnia triangula ex angulorum bisectione orta, sint aequalia, et horum vertices confluant in C, demonstrant numeri 60, 59. Q. E. F.

180. Coroll. I. Ergo cum circuli circumferentia considerari secundum praxin valeat, tamquam ex rectis infinite parvis composita, in eam si ducamus radii medietatem, ejus area invenitur.

181. Coroll. II. Hinc sectoris habetur superficies, si arcus interceptus ducatur in dimidium radii, ideoque etiam segmenti, si differentia sumatur inter

 aream

aream in ipso constituti sectoris, et illam trianguli super chorda.

PROBLEMA IV.

182. *Figurae irregularis* C G Z X, *notis omnibus externis lateribus*, *et distantiis* C D, D A *etc.*, *ubi ex angulis caderent perpendiculares*, *aream invenire*.

R. * Perpendicularis F D longitudinem praestat radix ex $\overline{FC^2 - CD^2}$ (87); pariter alterius G A habetur mensura, si F D addatur radici ex $\overline{FG^2 - FB^2}$ (F B = D A (78)); sic prosequendo de caeteris, et singularum figurarum (177, 178) sumantur areae, ex quibus subducta superficie externae figurae S O L, remanet area totius figurae datae.

Fig. 47.

Demonstratio fluit ex num. 24. Q. E. F.

NOTA. Tandem adnotare opus est coronidis gratia, dari aliquando planas figuras in perimetro ita irregulares, ut ad ipsarum inveniendas superficies nulla satis sit ex antecedentibus methodis: pernecesse est itaque resolvamus eas in triangula, et in figuras possibiles regulares, quarum omnium areae simul sumtae totam superficiem obtinebunt. Et ita cujusvis figurae, lateribus rectis terminatae, superficies integra habetur, cum saltem in triangula resolvi facile possit ope linearum rectarum ex angulis in angulos ductarum. GEO-



GEOMETRIAE SOLIDAE

CAP. I.

De Solidis.

DEFINITIONES.

1. *Angulus rectilineus solidus* est ille, qui efformari intelligitur ex pluribus, quam duobus simul junctis angulis rectilineis, horum verticibus in punctum confluentibus.

2. Coroll. Ad efformandum hujusmodi angulum, minor caeteris simul esse debet quivis rectilineus angulus.

3. *Plana recta parallela* sunt, quae in infinitum si producantur, semper idem intervallum inter se servant.

4. *Pyramis* est solidum, sive corpus (cujus notionem in Plana Geometria dedimus), pro basi habens figuram rectilineam et pro faciebus totidem triangula, angulum solidum efformantia.

5. Pyramis si habet facies omnes isosceles, dicitur *Recta*; sin minus, *Obliqua*.

6. Pyramidis *Altitudo* est perpendicularis ex vertice in basin, si opus productam, demissa.

7. *Conus* est solidum in punctum regulariter desinens secundum basin circularem. Si ex hoc puncto, vertice scilicet, in basis medium cadit perpendicularis, Conus dicitur *Rectus*; sin minus, *Obliquus* nominatur.

8. Coroll. Cum circularis figura *practice* (G. P. 98) considerari valeat, tamquam infinitorum laterum polygonum, Conus tamquam pyramis lateribus infinite parvis constans supponi potest.

9. *Conus truncatus*, vel *Pyramis truncata* est, cui deest vertex in punctum desinens.

10. *Prysma* est solidum, cujus facies sunt totidem parallelogramma; bases vero sunt planae rectilineae figurae inter se parallelae, et aequales. Ex quibus Prysma sumit nomenclaturam specialem; hoc est *Triangulare* dicitur si pro basi habet triangulum, *Quadrangulare* etc., si quadratum.

11.

11. Prysma vel est *Rectum*, si latera perpendiculariter insistunt basi; vel *Obliquum*, si secus.

12. *Altitudo* prysmatis est recta, ex superficie superiori in basin, etiam, si necesse est, productam, perpendiculariter cadens.

13. Prysma, si adversae facies ei sunt parallelae, *Parallelepipedi* nomen habet.

14. *Cylindrus* est solidum rotundum secundum bases circulares aequales.

15. COROLL. Cylindrus considerari practice potest, tamquam infinitorum laterum prysma.

16. *Sphaera* est solidum, cujus superficiei omnia puncta aequedistant ex quodam medio, quod Sphaerae dicitur *Centrum*.

17. Sphaerae *Diameter* est recta per centrum transiens, et hinc inde superficiem tangens; cujus medietas, hoc est ex centro ad superficiem usque ducta recta, *Radius* dicitur.

18. COROLL. Sphaerae omnes non differunt, nisi magnitudine.

19. Solidum alii *simile* dicitur, si facies eaedem numero sint figurae similes.

20. Solidi extrema sunt superficies.

21. Inter solida simplicissimum est Pyramis triangularis, cujus scilicet basis triangulum est.

AXIOMATA.

22. Duae lineae rectae se se secantes in plano ad summum requiruntur, ut planum determinari possit.

23. COROLL. I. Hinc si duo hujusmodi rectae in plano parallelae sint duabus, simili modo in altero positis, ambo plana parallela sunt inter se.

24. COROLL. II. Si recta quaevis perpendicularis est utrique ex rectis hujusmodi, erit quoque et toti plano; et contra.

25. Si planum sit alii parallelum, erit huic itidem parallela quaecunque recta in illo ducta.

26. Si quaedam recta erit in plano perpendicularis, eidem quoque perpendiculare erit planum, secundum ipsam lineam erectum.

27. In plano perpendicularis, huic parallela in eodem plano perpendicularis erit.

28. Recta X N perpendicularis esse nequit
Fig. 48. in plano C M insimul, ac in altero diversimode posito secundum rectam Z S.

PRO-

PROBLEMA.

29. *Ex puncto* X *extra planum infinitum* C S M A *dato, in ipsum perpendicularem ducere.*

R. Ducatur recta A B super plano, et ex X in illam (G. P. 42) perpendicularis X O extra planum; ex O per planum perpendicularis O M; et ex X ad O M perpendicularis X N, haec quaerebatur.

D. Ex constructione A O, sive B O perpendicularis in O X, pariter in O M; ergo B O (24) perpendicularis in supposito plano X O N; ergo planum C S M A est (26) ad angulum rectum cum ipso X N O; sed ex constructione anguli X N O, X N M sunt recti; item, ducta S N Z parallela ad B A, erunt quoque recti ambo X N S, X N Z (27); ergo recta X N (24) perpendicularis est in dato plano. Q. E. F.

30. Coroll. Si in plano erigi velit perpendicularis, ex. gr. in puncto O; immissa perpendiculari X N in planum, methodo dicta, et ex puncto O (G. P. 39) huic ducta parallela, haec quaerebatur.

THEO-

THEOREMA I.

81. *Si duo plana* A D F C, *et* E F C B, *juncta ad angulum secundum latus* F C, *habeant latera* E B, D A *sibi parallela*, *aequedistantia haec quoque erunt communi lateri* F C; *et contra*.

D. 1°. * Si negatur, producta latera E B F C coibunt in O; et productum D A diverget ab F O versus O; et ambo producta versus Q concurrere (G.P.14) debent, quum Q D A semper parallelum esse debeat ad E B O: hinc in supposito plano secundum D E B A unius rectae Q F C O extrema Q et O quiescunt; ergo et tota (G. P. 45), videlicet F C jaceret in plano secundum D E B A contra hyp.; ergo etc. Q. E. 1°. D.

Fig. 49.

D. 2°. Duo plana E F C B, D F C A habebunt extrema D A, E B parallela, si tum D A, cum B E parallela sint ad F C: Si enim supponatur planum per D E B A, erunt duo plana, praedictum nempe, et aliud F E B C, quae juncta per E B habent parallela extrema F C, D A; ideo, ob antecedentem demonstrationem, parallela D A, B E. Q. E. 2°. D.

THEO-

THEOREMA II.

32. *Si plana* C S, *et* O M *habeant communem perpendicularem* D X, *inter se erunt parallela.*

D. * Ex D et X ducantur rectae D M, X S sibi (G.P.39) parallelae: hujusmodi rectae manent in planorum superficiebus; si negatur, recta D X perpendicularis esset et in plano C S, et in alio (26) secundum rectam X S supposito, quod est absurdum (28, G. P. 32 D. 2°.); sed duas parallelas coincidere est impossibile (G.P.10); ergo et plana secundum ipsas ducta. Q. E. D. Fig. 50.

33. Coroll. Ex quo sequitur, quod sicuti tertia recta est necessario parallela (G.P.37.) duabus inter se aequedistantibus, si uni ex illis parallela supponatur; sic quodvis planum aequedistans est pariter tertio C S, si tale supponatur ipsi O M, parallelo ex hyp. eidem C S.

THEOREMA III.

34. *Si duo plana* B D C, E I F *habeant latera* B D, *et* D C *parallela aliis* E I, I F, *erit angulus* B D C = E I F.

D. Fiant portiones I G = D B, et I M = D C (G.P.28), et ductis C M, D I, B G Fig. 51.

et

et M G, oritur (G.P.80) C M parallela ad D I, et D I alii B G; ideoque (31. D. 2°.) C M ipsi B G; ergo (G.P.80) G M = B C; hinc aequilatera triangula C I M, B D C (G.P.61) sunt aequiangula; ergo etc. Q. E. D.

THEOREMA IV.

35. *Si Pyramis* O L Q N *secetur per planum* C S M *basi parallelum*, *latera* C S, C M *parallela erunt lateribus* O N, O Q *in basi*; *et sectio plana huic erit similis*.

D. 1°. * Si negas, sint latera C X, C M parallela lateribus O N, O Q; ergo planum (23) per M C X transiens erit aequedistans basi; idem itaque erit (3), ac datum C M S. Q. E. 1°. D.

Fig. 52.

D. 2°. Planum itaque C M S (D. 1°.) in sectione facit latera S M, S C lateribus N Q, N O parallela; pariter et S M, M C aliis N Q, Q O; ergo (34) angulus S = N, C = O, et M = Q, hoc est (G.P. 102) figura C M S similis erit ad O Q N. Q. E. 2°. D.

36. Coroll. I. Cum Conus (impropriè) considerari valeat (8), tamquam Pyramis infinitorum laterum, etiam in Cono sectio parallela basi, huic similis erit, circularis videlicet.

37. Coroll. II. Si pyramides, vel Coni sint

sint ejusdem altitudinis, erunt uti (G.P. 84) basium perimetri, et contra: Si diversae tum altitudinis, tum basis, in ratione (G.P. 108, 138) composita ex ipsis.

THEOREMA V.

38. *In pyramidibus* L A D B, F A D B *ejusdem basis, et inter easdem parallela plana positis, sectiones* C X O, E G Y *per planum basi parallelum factae in superficie, pares erunt.*

D. * Latera C X, X O, O C, et E G, G Y, Y E parallela (35, 1°.) sunt lateribus basis communis, et relative aequalia (G.P. 134) inter se; itaque hujusmodi figurae C X O, E G Y sunt similes (35, 2°.) inter se, et (G.P. 61, 122) pares. Q. E. D. Fig. 53.

THEOREMA VI.

39. *In prysmate* G N *sectio* B E, *parallela basi, huic similis erit, et aequalis.*

D. Latera B F, F E etc. parallela sunt ad G I, I K etc., et inter se caetera F I, K E etc., ideo tum ista, tum illa (G.P. 78) inter se aequalia sunt. Hinc angulus (34) B F E = G I K etc.; ergo orta figura C F D (G.P. 102, 122) similis est basi, et aequalis. Q. E. D. Fig. 54.

40.

40. Coroll. I. Cylindrus veluti prysma infinitorum laterum (licet minus caste) considerari potest; idcirco si in ipso fit sectio basi parallela, erit haec ipsi quoque similis.

41. Coroll. II. Si prysmata, vel Cylindri sint altitudinis ejusdem, erunt eorum superficies, uti basium perimetri, et e converso. Si neque ejusdem altitudinis, neque perimetri, erunt (G. P. 138) in ratione composita ex utrisque.

THEOREMA VII.

42. *In sphaera* F N G *quaecunque sectio plana* C M D L, *circularem superficiem demonstrat*.

Fig. 55. *D.* Ex sphaerae centro in planum C M D L (29) immittatur perpendicularis E S; ex S ad plani extremitates ducantur quaevis rectae Z S X, H S A, et radii E H, E X, E A, E Z, qui omnes (16) aequales sunt, et (24) omnes anguli in S recti; ergo $EH^2 = ES^2 + SH^2$ (G.P.87), et $EX^2 = ES^2 + SX^2$; ergo, demtis aequalibus EH^2, EX^2, et communi ES^2, erit $SX^2 = SH^2$, id est $SX = SH$. Simili modo procedendo, demonstrantur reliquae rectae inter se aequales; iccirco figura C M D L (G. P. 4) est circularis. Q. E. D.

CAP.

CAPUT II.

De Planorum Proportione

DEFINITIO.

43. *Planorum Proportionem* eam dicimus, quam inter se habent planorum soliditates, sive sint corporum massae.

AXIOMA.

44. Plana similia, et aequalibus faciebus praedita, inter se sunt aequalia.

THEOREMA I.

45. *Duo prysmata quadrangularia* A M, I G *ejusdem basis*, *vel aequalis* (quod idem est), *et inter eadem parallela plana*, *aequalia sunt*.

D. Plana sint I M, A G. Supponatur interstitium B D N O H E uti planum quoddam. Exurgunt itaque plana duo A C E H K I, D B F G M L inter se aequalia ob latera, et facies respective ae- *Fig. 56.*

aequales (44, P. G. 32, 83); ergo, demto communi E H O N B D, remanet solidum K I C A B D O N = M L N O H F G, additoque communi K I N O M L, exurgit totum M A aequale toto I G. Q. E. D.

46. Coroll. I. Si prysmata supponantur triangularia, ipsa dimidia sunt (44) eorum, quae bases habent quadrilateras: ideoque si eadem ejusdem basis, et altitudinis sint, aequalia pariter erunt.

47. Coroll. II. Idem dicatur, si bases sint polygona quaevis. Nam pro solidis regularibus, bases quadrilateras habentibus, sermonem fecimus; itemque pro triangularibus. Sed in partes considerari queunt quaevis bases multilaterae, itidemque plana, has bases habentia; ergo etc.

48. Coroll. III. Cum veluti prysmata infinitorum laterum, atque facierum (minus tamen opportune) considerari valeant (15) Cylindri, hinc hujusmodi solidi inter eadem parallela plana, et ejusdem basis, aequantur inter se.

THEOREMA II.

49. *Pyramides* A I B H , K Q M N *aequalium basium , et altitudinum , sunt aequales .*

D. * Si negatur, sit pyramis K Q M N = A I B H — A V Z Y . Ex planis X D F, S L T utrique basi parallelis supponantur divisae pyramides per altitudinis medietatem . Sectionum facies omnino similes (35 , 2°.) erunt basibus aequalibus; Ergo , ductis E G , O P per laterum medietates cujusque basis , duo prysmata D X F H G E , L T S O P N aequalium basium (38) et altitudinis , aequalia sunt (46); pariter et aequalia sunt solida D X E G I C, L S O P Q R, utpote quae aequalis basis , et altitudinis , considerari possint tamquam dimidia prysmatum . Eodem pacto sequatur pro pyramidibus K L S T , S R M O, et A D X F , X C B E ejusdem altitudinis , secando pariter per medietates , donec tandem ultimae parvae pyramides in A I B H ortae , consequenter et in K Q M N , minores sint simul sumtae datâ A V Z Y ; ergo esset pars pyramidis K Q M N > V Z Y H B I , quod est absurdum ob K Q M N = A I B H — A V Z Y ex hyp. Q. E. D. *Fig.* 57.

O 50.

50. COROLL. I. Si pyramides haberent bases non triangulares, eodem discursu eruitur aequales esse modo inter easdem parallelas, et aequalis basis fuerint.

51. COROLL. II. Cum Coni considerari valeant (8) tamquam infinitorum laterum pyramides; quae de his dicta fuere, de illis praedicari quoque poterunt.

THEOREMA III.

52. *Prysma* C D F O L X *resolvitur in tres pyramides, in soliditate aequales.*

D. Ductis rectis C L, C O, D O, oritur pyramis C D F O, quae habet aequalem basin, et altitudinem cum alia O L X C (10); ergo (49) aequales sunt. Caeterum pyramis O L D C habet basin L D O = O D F (G. P. 78), et eandem altitudinem C D cum eadem pyramide O F D C; ergo inter se (49) aequantur; ergo etc. Q. E. D.

Fig. 58.

53. COROLL. Conus supponitur jam (8) pyramis infinitarum facierum; pariter et Cylindrus (15) consideratur veluti prysma laterum infinitorum. Ergo inferre fas erit, Conum ejusdem basis, et altitudinis cum Cylindro, hujus tertiam partem demonstrare.

THEO-

THEOREMA IV.

54. *Prysmata* Cl, Cd *ejusdem altitudinis, sunt uti bases ejusdem latitudinis.*

D. * 1°. Si negas, sit $Cl : Cd = CL : AD$; ergo pariter et $Cl : Dl = CL : DE$ $(= cl : dx)$; hinc (G. P. 119) $Cl : Cd + Dl = CL : AD + DE$ $(= cl : ad + dx)$; sed $Cl = Cd + Dl$ (G. P. 24); ergo (G. P. 103) $CL = AD + DE$ $(= ad + dx)$, quod (G. P. 101) repugnat; ergo etc. Q. E. 1°. D. Fig. 59.

D. 2°. Prysmati Cl aequale sit $Ds < 2\,Cd$; erit itaque $Cd : Ds = CA : AS$ $(= cd : as)$, si supradictam rationem amplius habere negatur. Demtis minori Cd ex majori Ds, pariter CA ex LS (et $ls = cd$ ex as), orto $Ls = Cd$, et $ZS = CA$, habebitur (G. P. 118) $Cd : Dl = CA : AZ$ $(= cd : al)$. Supponatur $El = \frac{1}{2} Cd$, et $LZ = \frac{1}{2} CA$ $(lz = \frac{1}{2} cd)$; erit (G. P. 121) $El : De = LZ : AL$ $(= lz : az)$; sed $LZ < EL$ $(lz < el < az)$ $< AL$ ob $CA < CD$, consequenter erit $El < De$ contra hyp.; ergo etc. Q. E. 2°. D.

THEOREMA V.

55. *Prysmata* X O, C L *ejusdem altitudinis, et basium dissimilium tum in longum, tum in latum, sunt uti eaedem bases* X D, C B.

D. * Sit prysmatis pars C N ejusdem latitudinis in basi cum X O, et reliqua A L ejusdem longitudinis cum C N. Itaque C N : X O = C R : X D (54), et C N : C L = C K : C B; ergo (G. P. 121) X O : C L = X D : C B. Q. E. D.

Fig. 60.

56. Coroll. I. Eodem artificio demonstrantur, duo prysmata diversae tum altitudinis, tum basium esse in ratione composita (G. P. 108, 138) tum basium, tum altitudinum.

57. Coroll. II. Quae dicta fuere de prysmatibus basium oblongarum, eadem tenenda si pro basibus triangula similia habeant, pariterque polygonia: tamquam horum partes illa considerando.

58. Coroll. III. Prysmata, utpote tripla (52) pyramidum ejusdem altitudinis, et basium; quae demonstrata sunt de illis, de pyramidibus etiam enunciari queunt.

AP-



APPENDIX

De Solidorum Mensura.

59. PRo Solidorum *Mensura* simpliciter sumta, intelligitur superficies tantum lateralis: Si verò *totalis* verbum addatur, haec totam complectitur superficiem, etiam basium insimul.

PROBLEMA I.

60. *Pyramidis Rectae* O L Q N *superficiem metiri.*

R. Ducatur dimidium perimetri O N Q in totam perpendicularem, ex vertice L in unum latus basis ductam, ex. gr. L V, vel contra; productum, datae pyramidis superficies est. *Fig.* 52.

D. Pyramidis rectae cum ex aequalibus triangulis facies componantur, quorum bases perimetrum constituunt, si dimidium (G. P. *176.*) basis in altitudinem communem, vel e contrario, ducatur, quidquid oritur, superficies est pyramidis, utpote aggregatum superficierum omnium triangulorum, pyramidem componentium. Q. E. F.

61. Coroll. Coni recti superficies eodem pacto (8) habebitur. Et si basis superficies addatur eidem, habetur *totalis*, ut dicitur, Solidi superficies.

PROBLEMA II.

62. Prysmatis recti C D F O X *superficiem invenire.*

R. Ducatur basis perimeter X L O in altitudinem unius faciei F O (12): productum est quaesita superficies.

Fig. 58.

D. Prysma pro faciebus habet totidem parallelogramma ejusdem altitudinis, quia inter bases parallelas (10). Hinc si omnia latera basis, perimetrum nempe, in communem altitudinem ducamus, haberi necessario debet (G. P. 174) ipsius superficies. Q. E. F.

63. Coroll. I. Cylindri recti superficies invenitur, si in perimetrum ducamus ejus altitudinem, cum veluti prysma infinitorum laterum, practice quidem, considerare fas sit.

64. Coroll. II. Superficies *totalis* habetur, si huic producto addantur ambarum basium superficies.

PRO-

PROBLEMA III.

65. *Pyramidis, et Coni truncati* A N *superficiem invenire*.

R. Pyramidis, et Coni A N superficies habetur, si dimidium perimetri A D B unà cum dimidio alterius L M N in altitudinem lateralem ducamus. Fig. 61.

D. Facies truncatae pyramidis, vel coni, trapezia sunt: horum area habetur, si (G. P. 178) dimidium basis cum dimidio lateris oppositi ducamus in altitudinem; ergo etc. Q. E. F.

PROBLEMA IV.

66. *Sphaerae superficiem metiri*.

R. Sphaerae B D C M superficies habetur, si maximus circulus B D C M in diametrum B C ducatur. Fig. 62.

D. Intelligantur sectiones S Y, M R inter se parallelae, et perpendiculares in diametro B C: cum autem distantiae Y R, S M harum parallelarum in maximo circulo supponi practice possint infinite parvae, considerari queunt veluti rectae; ideoque figura M S Y R tamquam conus truncatus; cujus area oritur (65), si dimidium perimetri medii E N T in Y R ducatur. Caeterum

ex Y in Q R (G. P. 43) ducatur perpendicularis Y L, radius X T, qui est perpendicularis (G. P. 180) in Y R, et alter X D ad N T parallelus. Angulus itaque Y T L est rectus, pariter et D X N; demtis aequalibus N T X, T X D (G. P. 33) erit angulus Y T N, hoc est (G. P. 32) T R L = N X T; ergo quoque (G. P. 66) L Y R = X T N; ergo triangula X N T, R L V (G. P. 135) similia sunt; ideo R Y : Y L :: T X : T N :: B D C M : E N T, perimetri ambo (G. P. 170): hinc (G.P.144) R Y × E N T = Y L × B D C M. Idem dicendo de caeteris conis truncatis possibilibus, demonstrabitur totius sphaerae superficies aequalis ad B C × B D C M, quatenus omnia latera Y R etc. constituant circulum maximum, et altitudines Y L etc. totam diametrum B C. Q. E. F.

SCHOLION I.

67. Si Pyramidis *Obliquae* totalis quaeratur superficies, aggregatum fiat facierum, et basis arearum, methodis praescriptis (G. P. 175, 176,) inventarum. Eademque methodus teneatur, si de Truncata (G. P. 178) agatur.

De Prysmatis obliqui area invenienda non diversimode opus teneatur: hujus facies

sunt

sunt totidem parallelogramma etc., quorum areae (G. P. 175) simul sumtae dant totalem superficiem Prysmatis. Hoc quoque dicatur de Cylindro obliquo. Caeterum si detur solidum irregulare, constans vero superficiebus regularibus, harum areae simul in unum sumantur secundum methodos supra declaratas, et ita habebitur totalis superficies dati Solidi.

SCHOLION II.

68. Tandem subjungere hic obiter peropportunum existimavimus, canones nempe de *Soliditatis Mensura*, videlicet de inveniendo in dato solido numerum aequalium cuborum jam praefinitorum. Haec equidem facile habetur, si regularis solidi basis in ejus altitudinem ducatur, nimirum in numerum laterum cubi assumti pro mensura, in eadem contentum. Sicuti enim superficierum aream quadratum metitur, ita Solidorum massam Cubus. Hinc Prysmatis si soliditas quaeratur, basis superficiem in ejus altitudinem ducamus. Eodemque modo invenitur illa Cylindri, cum hic veluti prysma infinitorum laterum sit.

69. Si vero Pyramidis soliditas quaeritur, pariter et Coni, sat est, si basis area in

in tertiam altitudinis partem ducatur: ratio patet ex eo, quod Cylindrus se habet ad Conum ejusdem altitudinis, et basis, ex ratione Prysmatis in Pyramidem, veluti ratio 3 : 1, quod aperte patet ex numeris 52, 53.

70. Deinde ex eo quia circa sphaerae centrum ejus massa considerari potest composita ex totidem pyramidibus, quorum altitudinem communem radius repraesentat, et bases veluti planae superficies infinite parvae; ideo si in tertiam radii partem ducatur Sphaerae (66) superficies, habetur ipsius soliditas (69).

Nota. Cum circuli Theoria nondum geometrice explanata sit, et in Praxi solummodo liceat uti similitudine, et ratione sub numeris 169, 170 Appendicis recensita; ideoque ubi de ipsius practica mensura sermo incidit, sub Appendicibus eandem declaravimus, tamquam extra Institutum de ipsa pertractando. Pariter eadem de causa simili modo loquuti sumus, ubi mathematicam simplicitatem adamussim res non redolebat. Caveat itaque Tiro nobis objicere, et admirari, si post praecepta praescripta ipsi non abierimus.

DE



DE CONICIS SECTIONIBUS.

CAP. I.

De Parabola.

DEFINITIONES.

71. *Conicae Sectiones* sunt planae superficies, ortae e segmentis, quae diversimode Conus habere potest. *Prima* est C F A uni ex lateribus Coni parallela, basin habens in ipsamet solidi base, et dicitur *Parabola*. Fig. 63.

Secunda est parallela plano B R, ex Coni vertice ducto, non parallelo basi A C, et dicitur *Ellipsis*, uti D N H Y.

Tertia tandem est his duabus contraria, scilicet ducta ex aliquo lateris Coni puncto perpendicularis in basin, uti I Z P, et *Hyperbola* nominatur.

NOTA. Conus habere potest duas alias sectiones: altera nimirum est ex vertice perpendiculariter in basin, et altera basi parallela facta. In prima vero oritur *Triangulum*; in secunda (36) *Circulus*. Quae ambo cum haberi possint in pla-

Plana Geometria, quin Coni habeamus ideam, sub nomine *Sectionum* non continentur.

72. Harum curvarum vertices sunt puncta F, Z, orta ex perpendicularium erectione in basium medio O, E; vel, in Ellipsi, puncta D, H, inter se magis distantia. Haec puncta conjungens recta, vel perpendiculares in Parabola, et in Hyperbola, dicuntur *Axes*. Et rectae his parallelae *Diametri* vocantur.

73. Perpendicula in Axe vocari solent *Ordinatae*, hinc inde si curvam attingunt; *Semiordinatae* ex Axe ad curvam: Ex ordinata vero ad verticem pars Axis, vel diametri, nuncupatur *Abscissa*.

74. *Parameter* in Parabola est tertia proportionalis Axis, sive Abscissae, et Semiordinatae.

75. *Directrix* est recta, quae ex extremitate parametri, positae perpendicularis

Fig. 64. in Axis vertice, Axi parallela ducatur ad basin usque: Si in parametri medietate I, uti I H, *Subdirectrix* nuncupatur.

76. *Focus* est punctum in Axe Parabolae, distans ex vertice quarta parte parametri.

77. Coroll. Ergo, foco F, parametro

Fig. 65. N P, et $NO = \frac{1}{2} NP$, habetur $NO^2 = FN \times NP$; sed (74, G. P. 144) $FD^2 = FN \times NP$; ergo semiordinata $FD = NO$.

THEO-

THEOREMA L.

78. *In Parabola* A F C *quadratum ex semiordinata se habet ad alterius quadratum, ut primae abscissa, ad alterius abscissam, scilicet* $OC^2 : SX^2 = OF : SF$.

D. Ductis in basis circulo et diametro L M, et huic parallela V Q ad angulos rectos in O C, S X, et plano Q X V G basi parallelo, oritur (36) circulus V X Q G; ideo (G. P. 147) $OC^2 = LOM$, et $SX^2 = VSQ$, ob $GS = SX$, et $AO = OC$. At (71, G. P. 78) $OM = SQ$; ergo (G. P. 128) $OC^2 : SX^2 = LO : VS$; sed (G. P. 131) $LO : VS = OF : SF$; ergo $OC^2 : SX^2 = OF : SF$, Q. E. D. Fig. 63.

PROBLEMA.

79. *Ad Parabolam* B C D *ducere tangentem in puncto* C.

R. Ex C ducatur perpendicularis C E in Axe; haec producatur ad Subdirectricem in F; factoque $\div FE : EC : EA$ (G. P. 132); et ex A ad C ducta recta A C, haec *Tangens* erit. Fig. 64.

D. Si negatur, tangat quoque in K; ergo, ductis A F, et K N parallela ad F C, duo triangula L A K, E A C inter.

ter se similia (G. P. 32, 135) erunt; pariter et alia duo MAL, FAE; ideo LM : FE = LK : EC; quia aequo modo se habent (G. P. 131) ad rationem AL : AE (G. P. 121); sed (74) $EC^2 = 2EI = 2FAE$ (G. P. 144, et 78); ergo $LK^2 = 2MAL$; sed $LV^2 = LK^2$ (punctum V est in K ex hyp.) = 2LI (74) = 2MAL; ergo LI = MAL; demto trapezio MXBL, restat NIXM = XAB; sed ex aequalibus EI, et FAE, demto FXBE, remanet XAB = IFX; ergo NIXM = IFX, quo casu pars toto esset aequalis, quod repugnat; ideo etc. Q. E. F.

80. Coroll. I. Itaque ob IE = FAE; erit FI, vel EB = BA; nam EA = 2EB (G. P. 129).

81. Coroll. II. Facta EY = EF, et ex Y ad C ducta recta, haec tangenti erit perpendicularis: nam FE, hoc est YE : CE = CE : EA; ideoque angulus ACY (G. P. 147) rectus est; hinc YC in tangente est perpendicularis.

THEOREMA II.

82. *Ex Parabolae foco* F *ad tangentis verticalis extremitatem* M, *sectam ex tangente* X H, *ducta recta facit tum* F M X, *tum* F M H *angulos rectos*.

D. Ducatur semiordinata H G: ex construct. cum sit (74) N P parameter, erit $GH^2 = GN \times NP$; sed (G. P. 131) X N : X G = M N : H G, et $XN = \frac{1}{2} XG$ (80); ergo $MN = \frac{1}{2} HG$. Supposito N S dimidio ipsius N O, et N O dimidio parametri N P, habetur $GN \times NO = \frac{1}{2} HG^2$; ideo $GN \times NS$, hoc est (76) $XNF = \frac{1}{4} HG^2$; sed $MN^2 = \frac{1}{4} HG^2$ ob $MN = \frac{1}{2} HG$ (G. P. 146); ergo $XNF = MN^2$; ergo (G. P. 144) M N media proportionalis inter X N et N F, ideo (G. P. 147) F M X est angulus rectus, similiter et (G. P. 29) F M H. Q. E. D. *Fig.* 65.

83. Coroll. I. Ob X N = N G (80) habetur H M = M X (G. P. 131); sed M F commune; ergo (G. P. 58) triangulum M H F = M X F, ducta F H; et si C H parallela Axi, habemus angulum A H C = M X F (G. P. 32, D. 2°.) = M H F.

84. Coroll. II. Ex triangulorum aequalitate habetur F H = F X = G N + F N; sed

sed (G. P. 78) CH $=$ LG; ergo CH + HF $=$ LN + NF.

85. Coroll. III. Hujusmodi rectae FH, et NC simul sumtae quia pares sunt perpetuo Axi LN + FN, facile patet methodus Parabolam describendi; si nempe perpendicularis quaevis CH unà cum HF semper aequalis maneat dictis rectis LN, et FN, puncto H in gyrum agendo.

THEOREMA III.

86. *In Parabola* EGS, *ductis tangente in* G, *perpendiculari* BGX *in basi*, *et tangenti parallelis* IN, *et* SZ, *portiones* vI, ZS, *intra curvam positas*, *perpendicularis bisecat in* Q, *et* K.

D. 1°. Ducatur in Axe MA perpendicularis EB, cui parallelae duc, et GF: triangulum INO ob angulos aequales (G. P. 32, 135) simile est alii GAF; ergo sunt inter se (G. P. 139) uti $IO^2 : GF^2$; sed (78) $IO^2 : GF^2 =$ OE : FE $=$ BO : BF (G. P. 128), et (80, G. P. 129) BF $=$ GAF; ergo BO $=$ INO; nec non (79, D.) vNd $=$ Bd ob triangulum GAF simile alii vNd (G. P. 32, 135), quibus demtis utrisque, restat cO $=$ IvdO; et ex his communi trapezio LQvdO, erit

Fig. 66.

erit triangulum $c\,Q\,v = I\,Q\,L$; ergo $QV = QI$. Q. E. 1°. D.

D. 2°. Cadat tangenti parallela integra intra parabolam, et sit SZ, quae bisecta erit quoque in K ex parallela Axi BX per contactum transeunte. Triangulum enim SYM simile est alii GAF (G. P. 32, 135), iccirco se habent uti $SM^2 : GF^2$, sive (78) $= EM : EF = BM : BF$; sed $BF = GAF$; ergo $BM = SYM$. Insuper triangulum $Y\,d\,Z$ simile est ad SYM; ergo se habent uti $dZ^2 : SM^2$, sive uti $vd^2 : SM^2 = Ed : EM = Bd : BM$; sed $SYM = BM$; ergo $Y\,d\,Z = Bd$, addito his communi trapezio $K\,c\,d\,Y$, erit $BEYK = c\,Z\,K$; et demto in aliis communi $XKYM$, erit $SKX = KBEY$, ideo $SKX = K\,c\,Z$; ergo $SK = KZ$. Q. E. 2°. D.

87. Coroll. Diximus numero 79, D., triangulum $BGR = RAE$: his addita communi figura $QGRT$, exurgit $QGAET = BQT$, ex quibus demtis aequalibus TNE, $T\,v\,c\,B$ (D. 1°.), habetur $c\,Q\,v = QGAN$, quorum primo si addatur $K\,Q\,v\,Z$, alteri vero huic aequale (D. 2°.) $KQNY$, erit (G.P.119) $c\,Q\,v : c\,K\,Z = QGAN : KGAY$; sed (G. P. 139) $c\,Q\,v : c\,K\,Z = Q\,v^2 : KZ^2$, et (G. P. 128 (

P QG

QGAN : KGAY = GQ : GK; ergo (G. P. 121) $Qv^2 : KZ^2 = GQ : GK$; videlicet quaevis diameter (72) in Parabola facit eandem proprietatem relate ad abscissas, et ordinatas, ac *Axis primigenius*.



CAP. II.

De Ellipsi.

DEFINITIONES.

88. *Parameter* est quarta proportionalis rectanguli ex partibus Axis, divisi ex ordinata, quadrati ex ipsamet semiordinata, et totius Axis.

89. *Centrum* est punctum medium in Axe.

90. Posito parametro HE in extremitate Axis perpendiculariter, ex cujus extremitate ad alium verticem ducta recta, dicitur *Directrix*, uti AE; ex centro huic parallela, *Subdirectrix* nuncupatur, uti XZ. *Fig. 68.*

91. Foci sunt duo puncta (duo enim sunt foci in Ellipsi) in Axe primigenio, ita ex ipsis diviso, ut rectangulum ex partibus

tibus quarta pars sit rectanguli ex Axe in parametrum.

92. *Diameter Secundaria* est quaevis recta per centrum transiens, et hinc inde curvam tangens.

THEOREMA I.

93. *In Ellipsi* G D E M *quadrata ex semiordinatis sunt, uti rectangula ex partibus divisi Axis; nempe* $VM^2 : IF^2 = GVE : GIE$.

D. Oriuntur circuli duo in Cono A B C, si secatur per plana inter se parallela, et singula basi, quae per ordinatas P M, D F transeant; hinc $VM^2 : IF^2 = QVS : ZIX$, quia (G. P. 147) $QVS = VM^2$, et $ZIX = IF^2$, hoc est uti ratio composita ex $QV : ZI$, et $VS : IX$ (G. P. 138); sed $QV : ZI = VE : IE$ ob sectionem Z I parallelam basi Q V in triangulo QE V; et $VS : IX = GV : GI$; ergo $VM^2 : IF^2$ = ratio composita (G. P. 121) ex rationibus $VE : IE$, et $GV : GI$, nempe $= VE \times GV : IE \times GI$ (G. P. 108) Q. E. D. *Fig.* 67.

THEOREMA II.

94. *Si in Ellipsi* A M I H *producatur semiordinata* I L *usquedum pertingat ad Directricem in* D, *erit* $LI^2 = DL \times LH$.

D. Ex construct. se habet (88) A L H : $LI^2 = AH : HE = AL : LD$ (G. P.
Fig. 68. 131) $= ALH : DL \times LH$ (G. P. 128); ideoque (G. P. 104) $LI^2 = DL \times LH$ Q. E. D.

95. COROLL. Ducta Subdirectrix X Z producit $HZ = \frac{1}{2} HE$; quia (90, G. P. 131) $HX = \frac{1}{2} AH$; sed (G. P. 78, 33, 122) $ZODF = LHZO$; ergo $ZODF = \frac{1}{2} IL^2$.

PROBLEMA.

96. *Ad Ellipsis punctum* C *ducere tangentem.*

R. Posito semiparametro N S in Axe A N perpendiculari, et ductis Subdirectrice
Fig. 69. S D et Semiordinata C E F, fiat (G. P. 132) $\frac{1}{2} EF : EC : EG$; ex G ad C ducta recta erit *Tangens*.

D. Si falsum, tangat quoque in H, ducta L H, parallela ad F C, ideo perpendiculari (G. P. 33) in Axe, et ducta F G, erit (G. P. 144, et 84) $EC^2 = 2FGE = 2FENS$ (95); ergo $FGE = FENS$; demto communi F E N B, rema-

remanet B G N $=$ S F B ; sed ex construct. ÷÷ F E : E C : E G ; ergo ÷÷ O M : M H : M G ; nam triangulum E G C simile ad M G H, et F G E (G. P. 135, 137) ad O G M ; ergo O M $\times$ M G $=$ M H^2 ; idcirco O G M $= \frac{1}{2}$ M H^2 $= \frac{1}{2}$ M R^2 $=$ S L M N (95), demto communi B O M N, erit S L O B $=$ B G N $=$ S F B, pars toto, quod falsum ; ergo etc. Q. E. F.

97. Coroll. Si ducta sit recta C K ita, ut E K $=$ E F, haec erit in tangente perpendicularis, cum sit F E, sive ÷÷ E K : E C : E G (G P. 147).

THEOREMA III.

98. *In Ellipsi* A H I, *ductis parametro* I C, *Directrice* A C, *Subdirectrice* F D, *producto Axe* A I *in* L, *ita ut habeatur* ÷÷ E G : G H : G L ; *Si ex* B *extremitate rectae* H E B *ducantur* B D, *et* D L, *hae unam rectam faciunt, et insuper parallelam ad* E I.

D. Trapezium D E G I $=$ E L G (96; D.); demto communi I G E X, erit D X E $=$ X L I ; addito utrique triangulo D X L, exurgunt duo triangula aequalia D E L, D I L ejusdem basis D L ; ideoque inter easdem parallelas (G. P. 84) E I, D L ; sed D B parallela ad I E, quia Fig. 70.

 paral-

parallelas, et aequales jungit B E, D I (G. P. 80); ergo B D L (G. P. 12) una est recta; ideoque parallela ad E I. Q. E. D.

99. COROLL. I. In triangulo B A G quia F E (90) parallela basi B A, erit (G.P. 131) A G : G F = B G : G E = L G : G I; ergo A G : G F = L G : G I (G.P. 121); ideo (G.P. 144) A G × G I = G F × L G, addito communi FG^2, habetur (G. P. 156; 147) $FI^2 = LFG$.

100 COROLL. II. Est $FI^2 = LFG$; sed (G. P. 158) $FL^2 = FI^2 + ALI$, et idem (G. P. 146) $FL^2 = LFG + FLG$; ergo ALI = FLG (G. P. 26). Hinc nunquam punctum G in F pertingere potest; esset enim eo casu totum $FL^2 = ALI$ parti, quod repugnat; ergo etc.

101. COROLL. III. Cum sit A G : G F = L G : G I, *alternando* habetur A G : L G :: G F : G I (G. P. 124).

THEOREMA IV.

102. *In Ellipsi ductis tangente* N G; *et per contactum* P *recta* B O; *et* M O, B D *in Axi perpendicularibus*, *erit* 1°. M O *bisecta in* R: 2°., *ducta* M P D, *erit* B D *bisecta in* G.

D. 1°. Posita Directrice I B, et Subdire-

ctri-

ctrice E L F, habetur I M : H Q = M O : Q P; quia singulae rationes se habent uti B M : B Q, (G. P. 131) ob parallelam H P basibus in triangulis I B M, M B O: Similiter, ducta N F H, habentur duo triangula H N Q, P N Q, et F R cum sit parallela ad H P, erit H Q : F M = Q P : M R; ergo I M : H Q : F M = M O : Q P : M R; idcirco *ex aequo* (G. P. 126) erit I M : F M = M O : M R; sed (90, G. P. 131) I M bisecta in F; ergo M O quoque bisecta in R. Q. E. 1°. D. Fig. 71.

D. 2°. Singula triangula M P O, M P R, R P O singulis B P D, G P D, B P G (G. P. 83, 135, 137) similia sunt; ergo M O : O P = D B : P B, et O P : O R = P B : B G; ergo (G. P. 126) M O : O R = D B : B G; sed O R = $\frac{1}{2}$ M O; ergo B G = $\frac{1}{2}$ B D. Q. E. 2°. D.

103. Coroll. I. Est igitur M R : M P = G D : D P, *alternando* (G. P. 124) M R : G D = M P : P D = M Q : Q B (G. P. 131), videlicet M R, sive R O : G D = M Q : Q B.

104. Coroll. II. In Ellipsi est M R $\times$ B G = $\frac{1}{4}$ I M $\times$ M B; nam *alternando* habetur I M : M O = H Q : Q P; sed (94) = H Q : Q P : Q M; ergo (G. P. 121) I M : M O = Q P : Q M = D B : B M (G. P. 131)

P. 131): hinc $IM \times BM = MO \times BD$, et $MR \times BG = \frac{1}{4} IM \times MB$ (G. P. 146).

THEOREMA V.

105. *Ductis* CD, *et* GH *perpendicularibus in Axis extremitatibus, et tangente* HVD, *et ex* D, H *ad focum* E *rectis, hae faciunt angulum rectum in* E.

D. Est (104) $GH \times CD = \frac{1}{4} GC \times CS$,
Fig. 72. quae est parameter; ergo $GH \times CD = GEC$ (91); ideo (G. P. 144) GH: GE = EC: CD; sed anguli C et G singuli sunt recti ex construct.; ergo triangula ECD, HGE (G. P. 137) sunt similia, hinc angulus $GEH = EDC$, sed $EDC + CED = 90°$; ergo $CED + GEH = 90°$, ideoque (G. P. 30) rectus est DEH. Q. E. D.

106. Coroll. Si datur $GF = CE$, et ducantur HF, DF, angulus HFD demonstratur itidem rectus; ergo 1°. (G. P. 155) semicirculus describi potest per puncta transiens H, F, E, D, diametro HD; idcirco super chorda EF (G. P. 152) angulus $EDF = EHF$; in chorda FH angulus $FDH = FEH$, et super DE angulus $EFD = EHD$. Erit 2°. angulus $EFD + GFH = 90°$ (G. P. 29), pariter $GFH + FHG = 90°$,

$=90°$; ergo E F D $=$ F H G (G. P. 104); sed E F D $=$ E H D (1°.), ergo F H G $=$ E H D.

THEOREMA VI.

107. *Si ex* X *ad contactum* V *ducatur recta, haec erit in tangente perpendicularis*.
D. Alioquin sit X L. Angulus L D X $=$ C D E (105, 106), et ex hyp. X L D $=$ C; ergo (G. P. *66*, 102) triangula X D L, C D E sunt similia; consequenter (G. P. 135) D E : D C $=$ X D : L D, et *permutando* erit D E : X D $=$ D C : L D; sed triangulum E X D (G.P. 31, *66*) simile ad F X H; ergo (G. P. 135) F H : H X $=$ D E : X D $=$ D C : L D (G. P. 121). Duo triangula pariter X H L, F G H erunt similia ob (106, 2°.) angulum F H G $=$ X H L et ex hyp. X L H $=$ G; ergo (G. P. 135) G H : F H $=$ L H : H X, *alternando* G H : L H $=$ F H : H X $=$ D C : L D; et iterum *permutando* habetur G H : D C $=$ L H : L D $=$ G A : A C (103), ex V ducta semiordinata A V; sed (G. P. 118, 131) V H : D V $=$ G A : A C; ergo L H : L D $=$ V H : D V, nempe (G. P. 124) L H : V H $=$ L D : D V; sed L D $<$ D V; ergo L H $<$ V H, quod falsum; ideo etc. Q. E. D.

108.

108. Coroll. Angulus $EDF = EHF$ (106, 1°.); sed ob angulos in V, rectos intelligi possunt circuli descripti per F, X, V, H, et E, X, V, D, ideo super chordis FX, XE angulus $FVX = FHX$, et $EVX = EDX$; ergo ex rectis angulis XVD, XVH; demtis aequalibus FVX, EVX, remanet angulus $EVD = FVH$.

THEOREMA VII.

109. *In Ellipsi* SIG 1°. *ex* D *foco semiordinata* ID *aequalis est dimidio parametri* SE: 2°. *itidem*, F *foco*, *erit* $\div SG : DF : SG - SE$.

D. 1°. Est (88) $GDS : DI^2 = GS : SE = GS \times SE : SE^2$ (G. P. 128), et *permutando* habetur $GDS : GS \times SE = DI^2 : SE^2$; sed $GDS = \frac{1}{4} GS \times SE$ (91), ergo $DI^2 = \frac{1}{4} SE^2$, et (G. P. 146) $DI = \frac{1}{2} SE$. Q. E. 1°. D.

Fig. 73.

D. 2°. Differentia inter SG et SE sit SC; centro V, est (G. P. 156) $GDS + VD^2 = VS^2$; sed (91) $GDS = \frac{1}{4} GS \times SE$; et (G. P. 146) $VD^2 = \frac{1}{4} DF$; ergo $GS \times SE + DF^2 = 4 GDS + 4 VD^2 =$ (G.P. 156) $4 VS^2 = GS^2$ (G. P. 146); sed $GS^2 = GS \times SE + GS \times SC$ (G. P. 146); ergo $DF^2 = GS \times SC$; ideo habetur (G. P.

(G. P. 144) $\div$ G S : D F : S C. Q. E. 2°. D.

THEOREMA VIII.

110. *In Ellipsi* C G B *ductis tangentibus verticalibus* B D, C E, *in* G *alia* D E; *et ex centro* I *recta* I H, *parallela ad* A G, *haec erit aequalis semidiametro* I C.

D. Ducatur F S parallela ad I H, et F E, B H. Est F I = I A, ideo (G. P. 136) G H = H S; sed angulus F S G = A G D (G. P. 32), et (108) S G F = A G D, ergo F S G = F G S; ideo angulus F H G = F H S (G. P. 62), hoc est ambo recti; et quia tum E H F, tum F C E rectus, circumscribi potest circulus per C, E, H, F (G. P. 155), eritque angulus C E F = C H F super chorda C F (G. P. 152); sed C E F = B F D (106, 2°.), et B F D = B H D, si supponatur circulus per B, F, H, D, et B D pro chorda; ergo C H F = B H D, addito F H B, erit rectus D H F = C H B; ergo punctum H in semicirculo descripto ex Axe B C pro diametro (G. P. 154); ergo hujus medietas I C = I H. Q. E. D. *Fig. 74.*

111. COROLL. I. Quia angulus F G S = S, erit (G. P. 60) F G = F S = 2 H T ob S H = G H, et ob parallelam T H ipsi

ipsi F S (G. P. 131) ; sed A G = 2 I T ob eandem rationem ; ideo F G + G A = 2 I C = C B.

112. COROLL. II. Hinc methodus patet Ellipsim describendi, datis Axe B C, et focis A et F: Axis enim datus C B, sive F G + G A ita incedat, ut infinita puncta, ut ita dicam, vertex G post se relinquat, quae lineae conjungant, ut oriatur curva C G B, quaesita Ellipsis.

THEOREMA IX.

113. *Ex centro* I *ductis semiordinata* I H, *et ex focis* X, L, *rectis* X H, L H, *habetur* I D = L H.

D. Ob triangula (G. P. 58) aequalia
Fig. 75. H I X, H I L est X H = H L; sed P D = X H + H L (111); ergo I D = L H. Q. E. D.

THEOREMA X.

114. *Ductis ordinata* E M *per focum* L, *et tangentibus in* E *et* M, *convergentibus in* C, *erit* C L I = H I².

D. Habetur rectangulum C I L = D I² (99), sed C I L = C L I + L I² (G. P. 147); ergo D I², sive L H² = C L I + L I²; sed (G. P. 87) H L² = H I² + I L²; ergo, demto communi

ni LI^2, remanet rectangulum $CLI = HI^2$. Q. E. D.

THEOREMA XI.

115. *Est Axis dimidium* $ID \times EL = IH^2$.
D. Parametri dimidium $DY = EL$ (109, 1°.), sed (94) $ID \times DY = HI^2$, cum I sit in medio Axis DP; ergo $ID \times EL = HI^2$. Q. E. D.

116. Coroll. I. Est itaque $ID \times EL = HI^2 = CLI$ (114), ergo $CL : DI = EL : LI$, et *alternando* (G. P. 124) $CL : LE$, aut (G. P. 131) $CI : IF = DI : LI$; igitur $IF \times DI = CIL = DI^2$ (99); ergo dicendum $IF = ID = LH$ (113).

117. Coroll. II. Cum sit $FI = ID = \frac{1}{2} DP$; et, ducta verticali GP, (G. P. 136) $2FI = GP + SD$, erunt $2ID$, hoc est $DP = GP + SD$.

THEOREMA XII.

118. *Est* $PG = PL$, *et* $LD = DS$.
D. Demonstratum fuit (105, D.) $GP \times SD = PLD$, et (117) $DP = GP + SD$; ergo (G. P. 130) $GP = PL$, et insuper $SD = LD$. Q. E. D.

THEO-

THEOREMA XIII.

119. *Recta* Z R *per centrum* C *Ellipsis transiens, et per contactum* M *tangentis* M G, *secat* H I, *tangenti parallelam, bifariam in* V.

D. 1°. Cadat H I extra in P: ducantur ex punctis I, M, H semiordinatae S I ad T, M K, H L, et recta R N in Axi perpendicularis: habetur (99) ∺ C K : C N : C G, ideo (G. P. 141) $CK^2 : CN^2$, sive (G. P. 139) triangulum C M K : C R N = C K : C G; sed (G. P. 129) C K : C G = C M K : C M G, ideo (G. P. 104) C R N = C M G; ergo R M K N = M G K; sed (G. P. 139) I P S : M G K : H P L = $SI^2 : KM^2 : LH^2$ = Q S N : Q K N : Q L N (93); et cum Q N bisecta sit in C, erit (G. P. 156) $CN^2 - CS^2$ = Q S N, $CN^2 - CK^2$ = Q K N, et $CN^2 - CL^2$ = Q L N; ergo (G. P. 139, 121) triangulum C R N — C T S : C R N — C M K : C R N — C E L = Q S N : Q K N : Q L N; ergo I P S : M G K : H P L = R T S N : R M K N : R E L N; sed R M K N = M G K; ergo H P L = R E L N, et I P S = R T S N: demto communi A V E L N, erit A P N + H V E = R V A; sed A P N = R T I A, ablato communi I A N S; igitur, his demtis,

Fig. 96.

tis, erit triangulum H V E = T V I; idcirco I V = V H. Q. E. 1°. D.

D. 2°. Cadat E M tota intus. Ducta tangente verticali B D, erit trapezium G B D F = S E G; nam cum triangulum N H V aequale sit alii B H D, habetur ex dictis (D. 1°.) N P T V : G B D F = V T B : V G B = (93) T Y²: E G² (posita Y Z parallela tangenti) = Y Z T : E S G = T S M : E S G (G. P. 33, 59); sed Y Z T, sive T S M = N P T V (D. 1°.); ergo G B D F = E S G; addito communi G H F, erit B H D, sive N H V = E S H F: demto communi S L H, erit E L F = N L S V = P L M, posito T S M pro aequali N P T V; ergo E L = L M. Q. E. 2°. D. Fig. 77.

D. 3°. Recta X V quoque bisecta erit in A. Nam ex dictis, triangulum X V I = I B D K; addito communi I H K, erit X V H K = B H D = N H V (G. P. 33, 59); demto H A V, remanet X A K = N A V; ergo X A = A V. Q. E. 3°. D.

THEOREMA XIV.

120. *Secundaria diameter secta in* L, *et* A, *dat* L M² : A V² = C L Q : C A Q.

D. Triangulum O Q H = V N H (119, D.

D. 1°.); ablato communi HAV, remanet NAV = QAVO: itidem ex aequalibus PHSM, OQH, quia PHSM = VNH ob STM = YTZ (G. P. 33, 59) = NPTV (119, D. 1°.); demto communi HLS, erit PLM = QLSO; sed (G. P. 139) PLM: NAV :: $LM^2 : AV^2$; ergo (G. P. 121) $LM^2 : AV^2$ = QLSO : QAVO = OQH — HLS : OQH — AHV = $QH^2 - HL^2 : QH^2 - HA^2$ (G. P. 139) = CLQ : CAQ (G. P. 156) ob OC bisectam in H, et utcunque in L et A. Q. E. D.



CAP. III.

De Hyperbola.

DEFINITIONES.

121. C*Entrum* est punctum medium in recta EG, quae dicitur *Latus Transversum*, ducta secundum Axem Hyperbolae ad conum similem inversum, secundum primi latera productum, veluti est Y in Transverso Latere GE.

Fig. 78.

122.

122. *Parameter* est quarta proportionalis rectanguli ex Latere transverso cum Axe in Axem, quadrati ex semiordinata, ubi finem habet Axis, et ipsius Lateris.

123. *Directrix* habetur, si posita parametro Q L perpendiculari in Axis vertice, ex extremitate Lateris transversi per illam ipsius parametri ad basin recta ducatur D Q R: si vero ex dicti Lateris medietate I, huic parallela ducatur, nascitur *Subdirectrix* I X V.

124. *Asymptoti* sunt rectae, quae propius continuo Hyperbolae accedunt, sed nunquam vero ad hanc pertingent.

125. *Focus* est punctum in Axe, ut hujus pars ad verticem usque ex ipso intercepta, unà cum axe transverso, in eandem rectangulum aequale sit quartae parti facti ex dicto Latere transverso in parametrum.

THEOREMA I.

126. *In Hyperbola* K G X *sunt semiordinatarum quadrata, uti Axis Transversus cum abscissis in easdem abscissas ductus, scilicet* $NX^2 : HM^2 :: EN \cdot G : EH \cdot G$.

D. Supponatur Conus sectus plano per L M basi parallelo; oritur circulus C M D L: ducatur diameter C H D, quae *Fig. 78.*

 sit

sit parallela in basi ductae rectae ANB: quo posito, habetur $NX^2 : HM^2 = ANB : CHD$ (G. P. 147, 154), hoc est (G. P. 108, 138) in composita ratione ex AN : CH, et NB : HD; sed (G.P. 131) AN : CH = NG : HG, et in NEB etiam NB : HD = NE : HE; ergo pariter in ratione composita (G. P. 131) ex NG : HG, et NE : HE, nimirum (G. P. 138) $NX^2 : HM^2 = NE \times NG : EH \times HG$. Q. E. D.

THEOREMA II.

127. *In Hyperbola* LMN, *ductis Directrice* DQR, *et semiordinata* MPE, *erit* $EP \times PL = PM^2$.

D. Ex construct. (122) $DPL : PM^2 = DL : LQ =$ (G. P. 131) $DP : PE =$ (G. P. 128) $DPL : EP \times PL$; ergo $PM^2 = EP \times PL$. Q. E. D.

Fig. 79.

128. COROLL. Ducta Subdirectrix IV bisecat parametrum: nam (G. P. 131) DL : LI = QL : LX. Hinc quoque trapezium VXLO = VRZX ob XL = QX = RV (G. P. 78); ideo $VXLO = \frac{1}{2} ON^2$.

PRO-

PROBLEMA.

129. *Ad hyperbolam* I B N Tangentem *ducere in* B.

R. Ducatur Semiordinata B X D, et pertingat ad Subdirectricem T C; fiat (G. P. 132) ∺ X D : B X : X A; ducatur ex A ad B recta, haec *Tangens* erit. Fig. 80.

D. Si negatur, tangat et in S, ducaturque S V in Axe perpendicularis: quoniam ex construct. $XB^2 = DX \times XA$ $= 2\,DHIX$ (128); ducta D A, erit $DAX = DHIX$; ergo, demto communi D Z I X, restat $HDZ = ZAI$; sed etiam GS^2, sive $GF^2 = 2\,LHIG$ (128) $= 2\,VAG$; ergo $LHIG = VAG$; sine communi V Z I G, erit $ZAI =$ $LHZV$, scilicet $LHZV = HDZ$, quod absurdum; ergo ec. Q. E. F.

130. Coroll. Facto intervallo $XY = XD$, et ducta Y B, erit angulus A B Y rectus; cum ex construct. sit D X, nempe ∺ X Y : X B : X A (G. P. 147).

THEOREMA III.

131. *Producta* B D *ad Directricem in* E, *ductae rectae* E H, H A *unam constituunt rectam lineam.*

D. Quia $HI = ED$, erunt (G. P. 80) E H, D I parallelae. Triangulum Z A I $= HDZ$ (129, D.), addito communi

Z D I, erit D H I = D A I; ergo H A, D I parallelae (G. P. 84); ergo E H, H A unam rectam faciunt (G. P. 12). Q. E. D.

THEOREMA IV.

132. *Tangens in Hyperbola facit* ∸ X C : C I : C A.

D. Est E X : D X = K X : C X (G. P. 131), et E X : D X :: A X : I X ob parallelas D C ad K E, et I D ad E A; ergo (G. P. 121) K X : C X :: A X : I X; ideo K X I = C X A (G. P. 144); sed (G. P. 158) $K X I = C X^2 - I C^2$, et $C X A = C X^2 - X C A$ (G. P. 146); ideo (G. P. 23) $I C^2 = X C A$; ergo (G. P. 144) ∸ X C : C I : C A. Q. E. D.

133. Coroll. Punctum A nunquam exurgere potest supra centrum C, aut in ipso requiescere; cum sit enim $C I^2 = X C A$, (G. P. 158) $C I^2 + K X I = C X^2$, et (G. P. 146) $X C A + C X A = C X^2$, erit K X I = C X A (G. P. 23); ideo nunquam $C X^2 = K X I$; ergo punctum A minime quiescere potest in C, multo minus supra C; pars enim K X I esset major toto $C X^2$.

THEO-

THEOREMA V.

134. *In hyperbola* IBN *si ex Lateris extremitate* K *ducatur* KP *parallela ad* EB *semiordinatam*, *tangens verticalis* MIO, *et in* B *tangens* RB, *haec bisecat tum* IO, *tum* PK, *ducta* BIP.

D. 1°. Ducta recta KB, habetur EX : MI = XB : IO, ambae enim eandem habent rationem ad KX : KI (G. P. 121, 131); sed est (131) EX : HI = XB : IQ; quia itidem in triangulis EAX, BAX eodem modo se habent hujumodi rationes ad XA : AI; ergo (G. P. 121) MI : HI = IO : IQ; sed HI (128) est dimidium MI; ergo IQ = $\frac{1}{2}$ IO. Q. E. 1°. D.

D. 2°. Est (G. P. 131) IO : PK = BO : BK = QO : RK, et *permutando* habetur IO : QO = PK : RK; sed (D. 1°.) QO = $\frac{1}{2}$ IO; ergo RK = $\frac{1}{2}$ PK. Q. E. 2°. D.

135. Coroll. I. Cum *alternando* sit MI : IO = EX : XB, et EX : XB = XB : XI (127); et XB : XI = KP : KI ob triangula similia XIB, KIP, erit MI : IO = KP : KI; ergo MI × KI = IO × KP, et IQ × KR = $\frac{1}{4}$ MI × KI (G. P. 146).

136. Coroll. II. In similibus triangulis RBK, QBO est BO : BK, sive XI : XK = OQ : KR.

THEOREMA VI.

137. *Si, hyperbolarum Latere* G E *producto, foci sint* D *et* H, *ductis ad* M *tangente* C M; G I, *et* C E *verticalibus*, *et rectis* C H L, C D, D I L, *et* H I, *erit* 1°. *tum angulus* C D I, *tum* C H I rectus: 2°. *Si ex* L *ad contactum ducatur* L M, *haec erit in tangente* perpendicularis.

D. 1°. In triangulis G D I, et C E D anguli D G I, et C E D aequales sunt, quia recti; sed (135) rectangulum ex quarta parte parametri in Axem transversum aequale est ad G I $\times$ C E $=$ (125) G D $\times$ D E; ergo G I: G D $=$ D E: E C (G. P. 144); ergo ipsa sunt (G. P. 137) similia; ideo (G. P. 102) angulus G D I $=$ D C E; sed angulus D C E $+$ E D C aequalis uni recto (G. P. 64); ergo (G. P. 23) totus C D I rectus. Deinde pro G D, D E substitutis aequalibus H E, H G, erit G I: H E $=$ H G: E C, et (G. P. 124) *alternando*, G I: H G $=$ H E: E C; sed angulus H G I $=$ H E C; ergo triangula C E H, H G I sunt similia (G. P. 137), ideo angulus C H E $=$ G I H; sed uno recto aequantur duo G I H, G H I; ergo C H I rectus. Q. E. 1°. D.

Fig. 81.

D. 2°. Supponatur perpendicularis in tangen-

gente recta alia L N, triangula L N C, C E D essent similia; nam angulus L N C = C E D, quia ambo recti; et L C N = E C D, quia circa rectos C H I, C D I (D. 1°.) circumscripto circulo transeunte per I et C, habetur super chorda H I (G. P. 152) angulus H C I = H D I = E C D (D. 1°.); ergo (G. P. 135, 124) N C : C E = L C : C D = L I : I H ob L H I angulum rectum, uti C D I. Etiam triangula G I H, et L N I essent similia ob rectos L N I, H G I, et quia super chorda C D angulus C H D = C I D, et H I G = C I D = L I N (G P. 31, 66), erit (G. P. 135) N I : L I = I G : I H, et *permutando* N I : I G = L I : I H, ergo N I : I G = N C : C E; et *alternando* N I : N C = I G : C E = (136) G K : K E = S I : S Q (G. P. 118, 131) ob parallelas G I, K S, E Q, demtis proportionalibus E D, Q D (G. P. 119); ideoque *dividendo* (G. P. 118) N I : I C :: S I : I Q; sed S I : I Q = M I : I C ob similia triangula S I M, et C I Q; ergo N I : I C = M I : I C (G. P. 121); ergo (G. P. 104) N I = M I, quod est (G. P. 101) absurdum; ergo etc. Q. E. 2°. D.

138. Coroll. Ductis H M, M D, circumscribi supponantur circuli circa H, I, M,

L ob rectos I H L, I M L; et circa C, D, M, L ob rectos I M L, et C, qui rectus quoque est; quoniam angulus C H D = D C E, et E C H + C H E = 90° (G. P. 64), posito D C E pro aequali C H D; ergo sumtis pro chordis rectis C D, et H I, habentur anguli C M D = C L D, et H M I = H L I, consequenter C M D = H M I.

THEOREMA VII.

139. *In Hyperbola* N X M, *ductis ex focis* F, *et* V *ad contactum tangentis* M *rectis* V M, F M, *et huic parallela* V S, *erit* 1°. *triangulum* S V M *Isosceles*; 2°. *erit* Q N = V M — F M.

D. 1°. Angulus V M S = F M S (138), et F M S = S, quos enim aequales facit S M secans parallelas ex hyp. S V, F M (G. P. 33); ergo V M S = S; ergo (G. P. 60) triangulum S V M Isosceles. Q. E. 1°. D.

Fig. 82.

D. 2°. Ex centro E ducantur parallela ad F M; in Latere perpendiculares N X, Q C; et V C, X V, N D, V D, et Q D. Parallela D P (G. P. 37) ad S V facit S D = D M (G. P. 131) ob (121) F E = E V, et (G. P. 131) M P = P V; ergo (G. P. 62) angulus V D M = V D S. Ceterum V C Q = V D Q,

V D Q, quod patet, si supponatur circumscriptus circulus (G. P. 155) per C, V, Q, D, et V Q (152) pro chorda; pariter N V X = N D X, si N X habeatur pro chorda, alio circulo circumscripto per X, N, D, V ob rectos angulos V N X, V D X super eadem basi X V (G. P. 152); sed angulus V C Q, aut V D Q = N V X (137, D. 1°.) = N D X; ergo rectus V D M = Q D N; sed V M = 2 D P, et F M = 2 E P; ergo 2 D E = V M — F M; et quia centro E, intervallo N E = E Q, circulus circumscriptus transit per D (G. P. 155) angulum rectum, erit Q N = 2 D E; idcirco Q N = V M — F M. Q. E. 2°. D.

140. Coroll. Si dato Axe N G, et foco F, et ex N versus M puncta accipiantur ita, ut semper habeatur V M — M F = Q N, et per ipsa puncta ducatur linea, haec Hyperbola erit.

THEOREMA VIII.

141. *In hyperbolae foco* L *ducta semiordinata* L O, *et parametro* F G, *habetur* 1°. L O $= \frac{1}{2}$ F G: 2°. , *ducta* L A *ad focum alius inversae hyperbolae*, *erit* $\div$ F C : A L : F G + F C.

D. 1°. Est (122) C L F : L O^2 = C F : F G = C F

$= CF \times FG : FG^2$ (G. P. 128), et *permutando* $CLF : CF \times FG = LO^2 : FG^2$; sed (125) $CLF = \frac{1}{4} CF \times FG$; ergo $LO^2 = \frac{1}{4} FG^2$; ideo (G. P. 146) $LO = \frac{1}{2} FG$. Q. E. 1°. D.

Fig. 83.

D. 2°. Fiat $GH = FC$; est (125) $CLF = \frac{1}{4} CF \times FG$, et $DF^2 = \frac{1}{4} CF^2$ (G. P. 146) ob punctum D centrum Lateris; ergo $CF^2 + CF \times FG = 4 CLF + 4 DF^2$; sed $CF^2 = GH^2$, et $4 CLF + 4 DF^2 =$ (G. P. 158) $4 DL^2 = AL^2$, erit $CF \times FH = AL^2$; ergo (G. P. 144) $\div CF : AL : FH$, sive ob constructionem $\div CF : AL : FG + FC$. Q. E. 2°. D.

THEOREMA IX.

142. *In hyperbola* FNZ *sit parameter* GN, *Latus* NY, *et tangentis* $ON^2 = \frac{1}{4} GN \times NY$, *et* $ON = NE$: *A centro* Q *si ducantur rectae* QOL, QEP, *hae ejus* Asymptoti *sunt*.

Fig. 84.

D. * Si falsum, linea QOL tangat curvam ex. gr. in H: ducatur ordinata HB; ex construct. $ON^2 = \frac{1}{4} GN \times NY$; et (G. P. 146) $QN^2 = \frac{1}{4} YN^2$; habemus (G. P. 131) $QK^2 : KH^2 = QN^2 : NO^2 = YN^2 : GN \times NY =$ (G. P. 128) $YN : NG =$ (122) $YK N : KM^2$; sed ex hyp. $KH = KM$; ergo

QK²

$QK^2 : KH^2 = YKN : KH^2$; ideo (G. P. 104) $YKN = QK^2$, quod est (G. P. 158) absurdum; ergo etc.

Ceterum cum sit $QK^2 : KH^2 = YKN : KM^2$, et (G. P. 158) $QK^2 = YKN + QN^2$, et (G. P. 156) $KH^2 = KM^2 + BMH$, erit (G. P. 119) $QK^2 : KH^2$, aut $QN^2 : NO^2 = QN^2 : BMH$; idcirco $NO^2 = BMH$; sed latitudo CM crescit continuo versus basin, igitur MH decrescit; ergo tali methodo, et ratione ductae rectae (124) *Asymptoti* sunt. Q. E. D.

143. Coroll. Ex eo, quod rectangulum quodvis $PFI = NO^2$, etiam illud aequale erit cuivis BMH.

THEOREMA X.

144. *Ex Asymptotis habetur* $AC = FL$.

D. Triangula duo PAF, CLH habent basibus parallelas BC, et IF; ergo (G. P. 131) $IF : HC = LF : LC$, et $BC : PF = AC : AF$; ergo (G. P. 121) $LF : LC = AC : AF$, ideoque (G. P. 144) $AC \times LC = AF \times LF$; ergo (G. P. 130) $AC = LF$. Q. E. D.

THEO-

THEOREMA XI.

145. *Quaevis recta* C G, *ex centro* C *intra hyperbolam ducta* (*quae dicitur* Axis Secundarius), *positisque asymptotis* C A, C K, *tangente* D R H, *huic parallelas* E I, P K *bifariam dividit in* F, *et* G.

D. Semper E O = L I (144); ergo usquedum evadant, et ambo costituant tangentem D R H, proinde D R = R H: ob parallelam autem D H ad E I habetur (G. P. 191, 121) R H : F I = R D : F E, quia eadem ratione se habent ad C R : C F; ergo O F = F L; sicque agatur pro caeteris demonstrandis aequalibus. Q. E. D.

Fig. 85.

146. Coroll. Cum quivis Axis ex centro C semper bisecet ordinatas, dicendum ideo hyperbolae centrum ibi esse, ubi duae rectae Q C, G C se secant, ductae per medietates duarum ordinatarum inter se aequedistantium, ad angulum positarum, ex. gr. per G, F et per Q, S. Demonstratum enim est, centrum reperiri in recta ex. gr. G C, bisecante ordinatas P K, E I: item in recta Q C bisecante alias duas B T, A V; ergo in puncto intersectionis communis C.

SCHO-

SCHOLION.

147. Celeberrima hic subjungere opus duxi problemata quaedam, quae adhuc in Plana Geometria desiderantur. Et primo: *De inveniendis mediis continue proportionalibus, datis duabus rectis.*

148. Ex datis itaque B A, B C fiat (G. P. 86) rectangulum A B C D, et (G. P. 27) $BS = BA$: circa illius puncta, Fig. 86.
sive rectos angulos circulus (G. P. 155) circumscribatur, et super basi B S, et Axe B A Parabola (85) aequilatera constituatur, erunt quaesitae mediae rectae G E, G A, ex sectione circuli cum Parabola, ducta semiordinata G E.

Nam parameter (74) ∺ B A : E G : G A. Producta E G in F, ob rectangulum $EGF = AGB = DLC = ELF$ (G. P. 153), erit (G. P. 130) $GF = LE$. Recta G E secta in L dabit (G. P. 146) $GEL + EGL = GE^2 = BAG$ (74); sed (G. P. 147) $BAG = BGA + GA^2$; ergo demtis aequalibus B G A, et $GEL = FLE$, remanet $GA^2 = EGL$: hinc ∺ G E : G A : G L, hoc est (G. P. 78) ∺ G E : G A : B C; sed ∺ B A : G E : G A; ergo ∺ B A : G E : G A : B C, quod desiderabatur.

149. *Cubum duplicamus in Geometria, si latus*

tus obtinemus cubi, qui in soliditate duplus sit dati.

Hujusmodi Problematis solutio pendet ex mediis proportionalibus; itaque si inter latus dati cubi, et ejus duplum duae mediae proportionales methodo supradicta inveniantur, harum prima media latus repraesentat quaesiti cubi.

Diximus enim (G. P. 138), quatuor quantitatum continue proportionalium, rationem primae ad extremam eandem esse, ac *triplicatam* ex prima ad secundam; hoc est uti cubi soliditas super prima costituti, ad illam super secunda: sed ex construct. prima est subdupla extremae quantitatis; ergo cubus habens pro latere primam quantitatem subduplus erit illius super altera ordinati.

150. Tertium Problema est: *De Anguli Trisectione.*

Datus sit itaque angulus L B N. Centro B, si describatur arcus L C A N, et fiat L C = C A = A N; habetur, ductis C B, A B, ipsius anguli trisectio.

Fig. 4.

Ipsa L C ut habeatur, ex Algebra aequatio est quaerenda. In Algebra ex num. 51 ob L P = L C, et N A = N X, habetur L C + C A + A N = L N + C A − P X; et, ducta C O parallela ad A X, habetur C A − P X = O P (G.P.78.). Trian-

angu[la] C B L, C L P, C P O sunt similia ergo oriuntur *continuae progressiones* $\div$ B L : L C : C P, et $\div$ L C : C P : P O : facta B L $= 1$, et L C $= x$, habetur 1°. $\div 1 : x : \frac{x^2}{1}$, et 2°. $\div x : \frac{x^2}{1} : \frac{x^4}{x}$; haec $\frac{x^4}{x} = x^3$. Sit L N $= q$, habetur aequatio $3x = q + x^3$, quae correspondet ad 3 L C $=$ L N $+$ O P. Hujusmodi aequatio invenienda est pro trisectione quaesita. Haec obtinetur ex Parabola, et Circulo.

R. Pro parametro sumpta recta L B, Parabola describatur (85) : fiat E H $=$ ½ B L $= \frac{1}{2}$, et H K $=$ 3 E H $= \frac{3}{2}$, et K D $= \frac{1}{2} q$, ducto Axe E M. Centro D, intervallo recta D E, ad parabolae verticem ducta, describatur circulus, qui secat parabolam in F, erit semiordinata I F $=$ L C. *Fig.* 87.

D. Producatur F I in G, ita ut habeatur G I $=$ D K, ducatur G D, et D E, D F. Ipsa I F vocetur x. Ex constr. K D $= \frac{1}{2} q$, et E H $= \frac{1}{2}$; ergo (G. P. 87) D E $^2 = 4 + \frac{1}{4} q^2$; sed (74) $x^2 =$ B L $\times$ E I $= 1 \times$ E I; ergo $x^2 =$ E I; sed E K $= 2$; ergo I K, sive D G $= 2 - x^2$; sed G F $= x + \frac{1}{2} q$ ob G I $=$ D K $= \frac{1}{2} q$; et D F $^2 =$ D G $^2 +$ G F ^{2}, hoc est D G $^2 = \overline{2 - x^2}^{\,2} = 4 - 4x^2 + x^4$,

et

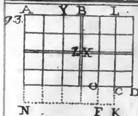
et $GF^2 = \overline{x + \frac{1}{2}q}^2 = x^2 + \frac{1}{4}q^2 + qx$; ergo $DF = 4 - 4x^2 + x^4 + x^2 + \frac{1}{4}q^2 + qx = DE^2 = 4 + \frac{1}{4}q^2$: demtis aequalibus, oritur $-4x^2 + x^4 + x^2 + qx = o$; et facta subtractione, habetur $-3x^2 + x^4 + qx = o$. Dividatur aequatio per x, habetur $-3x + x^3 + q = o$, hoc est (*Alg.* 43) $3x = x^3 + q$. Q. E. F.

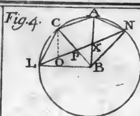
Finis Geometriae Planae, et Solidae.

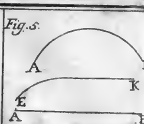
Ad majorem Dei, Virginisque Matris Mariae Gloriam.

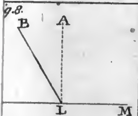
		Errata	Corrige
pag. 5.	lin. 14.	Metheseos	Matheseos
6.	11.	cecutire	caecutire
32.	2.	(11)	(12)
94.	5.		Q. E. F.
187.	1.	CAP. V.	CAP. VI.

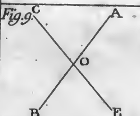


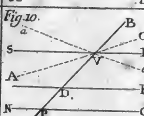

g.3.
A Y B L
Z X
O C D
N F K

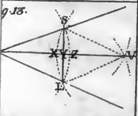

Fig.4.
C A N
X
L O P B

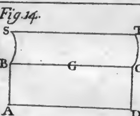

Fig.5.
A
K
E
A

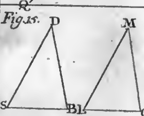

g.8.
B A
L M

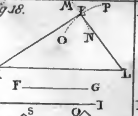

Fig.9.
C A
O
B E

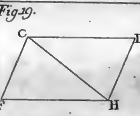

Fig.10.
B
a
S
V
A
D
N
P
Q

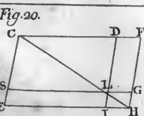

g.13.
S
X Y Z
V
E

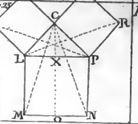

Fig.14.
S T
B G C
A D

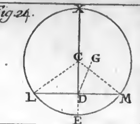

Fig.15.
D M
S B L

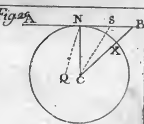

g.18.
M E P
O N
L
F G
I


Fig.19.
C D
F H


Fig.20.
C D F
S L G
E I H


g.23.
S Q
C R
L X P
M O N


Fig.24.
X
C G
L D M
E


Fig.26.
A N S B
X
Q C

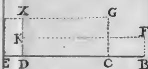


Fig. 28.

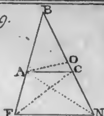


Fig. 29.

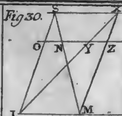


Fig. 30.

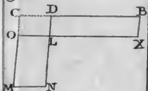


Fig. 33.

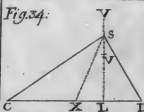


Fig. 34.

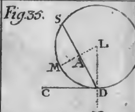


Fig. 35.

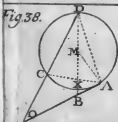


Fig. 38.

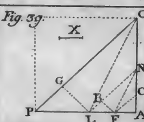


Fig. 39.



Fig. 40.

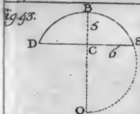


Fig. 43.

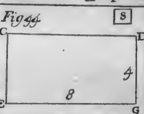


Fig. 44.

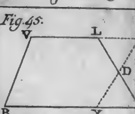


Fig. 45.

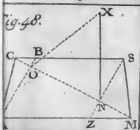


Fig. 48.

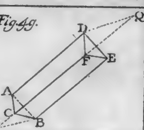


Fig. 49.

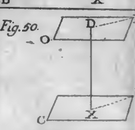
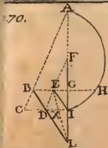
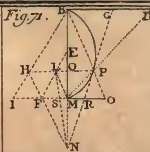
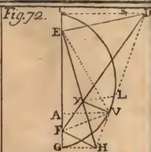
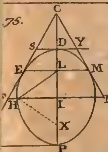


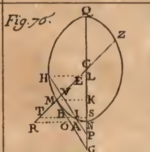
Fig. 50.

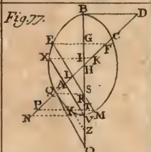

70.
A
F
B
E
G
H
C
D
X
I
L

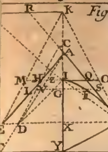

Fig.71.
B
G
D
E
H
Q
P
I
F
S
M
R
O
N

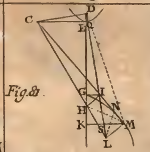

Fig.72.
C
S
E
X
L
A
V
F
G
H

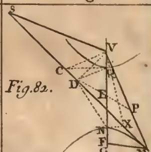

75.
C
S
D
Y
E
L
M
H
I
N
X
P

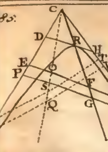

Fig.76.
Q
Z
C
H
E
L
V
M
K
T
B
I
S
R
O
A
N
P
G

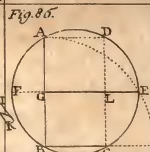

Fig.77.
B
D
E
G
C
F
X
I
K
H
L
A
S
Q
R
P
T
N
V
M
Z
O

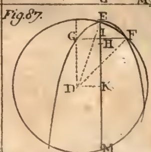

R
K
Fig.80.
C
A
M
H
I
Q
O
L
V
G
S
D
X
B
Y
N


D
C
E
Fig.81.
G
I
H
N
K
M
S
L


S
V
C
D
Fig.82.
E
P
X
N
F
G
M


85.
C
D
R
H
T
V
E
P
O
S
F
Q
G
I
K


Fig.86.
A
D
F
G
L
E
B
C
S


Fig.87.
E
G
I
F
H
D
K
M